

入 学 試 験 問 題



数 学

東 京 大 学 2007 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

n と k を正の整数とし、 $P(x)$ を次数が n 以上の整式とする．整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば、 $P(x)$ の n 次以下の項の係数は、すべて整数であることを示せ．ただし、定数項については、項それ自身を係数とみなす．

第 2 問

n を 2 以上の整数とする. 平面上に $n + 2$ 個の点 $O, P_0, P_1, \dots, P_n$ があり, 次の 2 つの条件をみたしている.

(i) $\angle P_{k-1}OP_k = \frac{\pi}{n}$ ($1 \leq k \leq n$), $\angle OP_{k-1}P_k = \angle OP_0P_1$ ($2 \leq k \leq n$)

(ii) 線分 OP_0 の長さは 1, 線分 OP_1 の長さは $1 + \frac{1}{n}$ である.

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし,

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

とおくとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

を求めよ.

第 3 問

座標平面上の2点 P, Q が、曲線 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上を自由に動くとき、線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし、 $P = Q$ のときは $R = P$ とする。

- (1) a を $-1 \leq a \leq 1$ をみたす実数とすると、点 (a, b) が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。
- (2) D を図示せよ。

第 4 問

以下の問いに答えよ.

- (1) 実数 a に対し, 2 次の正方行列 A, P, Q が, 5 つの条件 $A = aP + (a + 1)Q, P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = O, QP = O$ をみたすとする. ただし $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である. このとき, $(P + Q)A = A$ が成り立つことを示せ.
- (2) a は正の数として, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a + 1 \end{pmatrix}$ を考える. この A に対し, (1) の 5 つの条件をすべてみたす行列 P, Q を求めよ.
- (3) n を 2 以上の整数とし, $2 \leq k \leq n$ をみたす整数 k に対して $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k + 1 \end{pmatrix}$ とおく. 行列の積 $A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2$ を求めよ.

第 5 問

表が出る確率が p ，裏が出る確率が $1 - p$ であるような硬貨がある．ただし， $0 < p < 1$ とする．この硬貨を投げて，次のルール (R) の下で，ブロック積みゲームを行う．

$$(R) \begin{cases} \text{(i)} & \text{ブロックの高さは，最初は 0 とする.} \\ \text{(ii)} & \text{硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，} \\ & \text{裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す.} \end{cases}$$

n を正の整数， m を $0 \leq m \leq n$ をみたす整数とする．

- (1) n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ．
- (2) (1) で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ．
- (3) ルール (R) の下で， n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える．2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ．ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする．

第 6 問

以下の問いに答えよ.

(1) $0 < x < a$ をみたす実数 x , a に対し, 次を示せ.

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

(2) (1) を利用して, 次を示せ.

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

ただし, $\log 2$ は 2 の自然対数を表す.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)