

# 東京大学 2007 年度 理系

## 解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

### 【第 1 問】

$n$  と  $k$  を正の整数とし、 $P(x)$  を次数が  $n$  以上の整式とする。整式  $(1+x)^k P(x)$  の  $n$  次以下の項の係数がすべて整数ならば、 $P(x)$  の  $n$  次以下の項の係数は、すべて整数であることを示せ。ただし、定数項については、項それ自身を係数とみなす。

### ▶ 解法 1

#### 【方針】

$P(x)$  の低次係数を  $a_j$ 、 $(1+x)^k P(x)$  の低次係数を  $b_j$  とおく。 $x^j$  の係数  $b_j$  は  $a_j$  と、それより低い  $a_{j-1}, a_{j-2}, \dots$  の整数係数つき和で表される。したがって  $j=0$  から順に、すでに整数と分かった係数を差し引いて  $a_j$  が整数であることを示す。高次の項は  $x^j$  の係数に影響しないため、 $n$  次以下だけで閉じた帰納法になる。

#### 【解答】

$P(x)$  の  $x^j$  の係数を  $a_j$ 、 $(1+x)^k P(x)$  の  $x^j$  の係数を  $b_j$  とおく。仮定より  $b_0, b_1, \dots, b_n$  はすべて整数である。 $(1+x)^k$  を掛けたときの  $x^j$  の係数は、 $P(x)$  の  $j$  次以下の係数だけから決まる。具体的には、 $0 \leq j \leq n$  について

$$b_j = a_j + \sum_{i=1}^{\min(k,j)} {}^k C_i a_{j-i}$$

である。

まず  $j=0$  では  $b_0 = a_0$  であるから、 $a_0$  は整数である。

次に、ある  $j$  について  $a_0, a_1, \dots, a_{j-1}$  がすべて整数であると仮定する。このとき

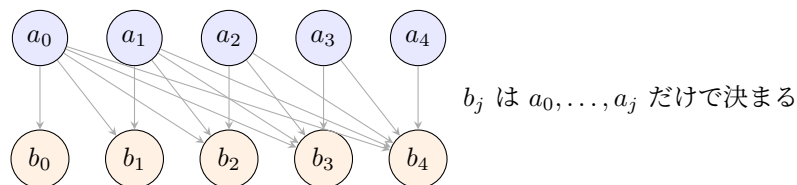
$$\sum_{i=1}^{\min(k,j)} {}^k C_i a_{j-i}$$

は整数である。また  $b_j$  も整数であるから

$$a_j = b_j - \sum_{i=1}^{\min(k,j)} {}^k C_i a_{j-i}$$

は整数である。

よって数学的帰納法により、 $a_0, a_1, \dots, a_n$  はすべて整数である。したがって  $P(x)$  の  $n$  次以下の項の係数はすべて整数である。



係数関係は三角型で、 $b_0$  から順に  $a_j$  を復元できる。

## ▶ 解法 2 (逆多項式を有限次数で作る)

### 【方針】

$(1+x)^{-k}$  の  $n$  次までの係数がすべて整数であることを使う。有限多項式  $R_n(x)$  を作り、 $(1+x)^k R_n(x) \equiv 1 \pmod{x^{n+1}}$  から、 $P$  の低次部分を整数係数多項式の積として復元する。

### 【解答】

$$R_n(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{k+j-1}^j x^j$$

とおく。負の指数の二項展開を公式として使わずとも、係数を順に比較すれば

$$(1+x)^k R_n(x) = 1 + x^{n+1} S(x)$$

を満たすある多項式  $S(x)$  が存在することを帰納的に確かめられる。特に  $R_n(x)$  の係数はすべて整数である。

$Q(x) = (1+x)^k P(x)$  とおく。仮定により  $Q(x)$  の  $n$  次以下の係数は整数である。上式を  $P(x)$  に掛けると

$$\begin{aligned} R_n(x) Q(x) &= R_n(x) (1+x)^k P(x) \\ &= P(x) + x^{n+1} S(x) P(x). \end{aligned}$$

したがって  $P(x)$  と  $R_n(x) Q(x)$  は  $n$  次以下の係数が一致する。一方、 $R_n$  の係数と  $Q$  の  $n$  次以下の係数は整数なので、その積の  $n$  次以下の係数も整数である。よって  $P(x)$  の  $n$  次以下の係数はすべて整数である。

**【総評】** 難度 5, 計算量 3。低次から順に係数を復元する三角型の議論である。 $(1+x)^k$  の定数項が 1 であるため、 $b_j$  の中に  $a_j$  が係数 1 で現れることが決定的である。高次の係数を気にし始めると見通しが悪くなるが、 $x^j$  の係数には  $a_0$  から  $a_j$  までしか関与しない。10 分程度で、帰納法の仮定と差し引く整数和を明確に書きたい。

### 【第 2 問】

$n$  を 2 以上の整数とする。平面上に  $n+2$  個の点  $O, P_0, P_1, \dots, P_n$  があり、次の 2 つの条件をみたしている。

- (i)  $\angle P_{k-1} O P_k = \frac{\pi}{n}$  ( $1 \leq k \leq n$ ),  $\angle O P_{k-1} P_k = \angle O P_0 P_1$  ( $2 \leq k \leq n$ )
- (ii) 線分  $O P_0$  の長さは 1, 線分  $O P_1$  の長さは  $1 + \frac{1}{n}$  である。

線分  $P_{k-1} P_k$  の長さを  $a_k$  とし、

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

とおくとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

を求めよ。

### 【方針】

$r_k = O P_k$ ,  $\theta = \pi/n$  とおく。各三角形  $O P_{k-1} P_k$  では、 $O$  の角が一定で、 $P_{k-1}$  側の角も一定なので、正弦定理から  $r_k/r_{k-1}$  が一定になる。初期条件  $r_1/r_0 = 1 + 1/n$  より  $r_k = (1 + 1/n)^k$  である。各辺  $a_k$  は余弦定理で  $r_{k-1}$  の一定倍になり、 $s_n$  は等比数列の和に帰着する。最後は  $\lambda = 1 + 1/n$ ,  $\theta = \pi/n$  として、 $n \sin(\pi/(2n)) \rightarrow \pi/2$  と  $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$  を用いる。

### 【解答】

$\theta = \frac{\pi}{n}$ ,  $r_k = O P_k$  とおく。また  $\alpha = \angle O P_0 P_1$  とおく。条件より、すべての  $k$  について三角形  $O P_{k-1} P_k$  の  $O$  における角は  $\theta$ ,  $P_{k-1}$  における角は  $\alpha$  である。

三角形  $O P_{k-1} P_k$  に正弦定理を用いると、辺  $O P_k$  は角  $\alpha$  の向かい、辺  $O P_{k-1}$  は角  $\theta + \alpha$  の向かいにあるので  $\frac{r_k}{r_{k-1}} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)}$  である。右辺は  $k$  によらない。ところが  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = 1 + \frac{1}{n}$  であるから、この一定比を  $\lambda = 1 + \frac{1}{n}$  とおける。したがって  $r_k = \lambda^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$  である。

次に,  $a_k = P_{k-1}P_k$  を余弦定理で求める。  $OP_{k-1}$  と  $OP_k$  のなす角は  $\theta$  だから

$$\begin{aligned} a_k^2 &= r_{k-1}^2 + r_k^2 - 2r_{k-1}r_k \cos \theta \\ &= r_{k-1}^2(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta) \end{aligned}$$

である。よって  $a_k = \lambda^{k-1}\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta}$  である。

したがって

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta} \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} \\ &= \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta} \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \\ &= n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta} \end{aligned}$$

である。

ここで  $1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta = (\lambda - 1)^2 + 2\lambda(1 - \cos \theta)$  であり,  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$  だから

$$\begin{aligned} n^2(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta) &= n^2(\lambda - 1)^2 + 4\lambda n^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 1 + 4\lambda \left(n \sin \frac{\pi}{2n}\right)^2 \end{aligned}$$

である。  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\lambda \rightarrow 1$ ,  $n \sin(\pi/(2n)) \rightarrow \pi/2$  なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta} = \sqrt{1 + \pi^2}$$

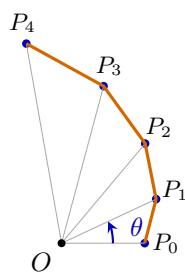
である。また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

である。以上より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = (e - 1)\sqrt{1 + \pi^2}$$

である。



中心角は一定で、半径  $r_k = OP_k$  は公比  $\lambda = 1 + 1/n$  の等比数列になる。

**【総評】** 難度 7, 計算量 6。図形条件を半径列  $OP_k$  の等比性に変換するところが核心である。正弦定理では、どの辺がどの角の向かいにあるかを取り違えると比が逆になるため注意したい。辺長  $a_k$  は余弦定理で求めると等比数列の和になり、最後の極限は  $a_k$  1 本が  $1/n$  程度で、 $n$  本の和が有限値に落ち着く構造である。25 分程度を見込み、図に角  $\alpha$ ,  $\theta$  と半径  $r_k$  を書き込んでから式に入るとよい。

**【第 3 問】**

座標平面上の 2 点  $P, Q$  が、曲線  $y = x^2$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 上を自由に動くとき、線分  $PQ$  を  $1:2$  に内分する点  $R$  が動く範囲を  $D$  とする。ただし、 $P = Q$  のときは  $R = P$  とする。

- (1)  $a$  を  $-1 \leq a \leq 1$  をみたす実数とすると、点  $(a, b)$  が  $D$  に属するための  $b$  の条件を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $D$  を図示せよ。

**▶ 解法 1**
**【方針】**

$P = (u, u^2)$ ,  $Q = (v, v^2)$  とおき、内分点  $R = (a, b)$  を  $u, v$  で表す。 $a = (2u + v)/3$  から  $v = 3a - 2u$  と消去すると、 $b = 2(u - a)^2 + a^2$  となり、固定した  $a$  について  $u$  の 2 次関数を調べればよい。制約  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $-1 \leq v \leq 1$  から  $u$  の許される区間を求めると、 $u = a$  は常に含まれるので最小は  $a^2$ 。最大は端点のうち  $a$  から遠い方で起こり、端点の切り替わりにより  $a = -1/3, 0, 1/3$  で場合分けする。

**【解答】**

(1)  $P = (u, u^2)$ ,  $Q = (v, v^2)$  とおく。 $R$  は線分  $PQ$  を  $1:2$  に内分する点であるから  $a = \frac{2u + v}{3}$ ,  $b = \frac{2u^2 + v^2}{3}$  である。第 1 式から  $v = 3a - 2u$  である。これを  $b$  に代入すると

$$\begin{aligned} b &= \frac{2u^2 + (3a - 2u)^2}{3} \\ &= 2u^2 - 4au + 3a^2 \\ &= 2(u - a)^2 + a^2 \end{aligned}$$

となる。

次に  $u$  の範囲を求める。 $P, Q$  はどちらも  $-1 \leq x \leq 1$  の曲線上を動くので  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $-1 \leq v \leq 1$  である。 $v = 3a - 2u$  を用いると  $-1 \leq 3a - 2u \leq 1$  すなわち  $\frac{3a - 1}{2} \leq u \leq \frac{3a + 1}{2}$  である。したがって許される  $u$  の範囲は

$$\max\left(-1, \frac{3a - 1}{2}\right) \leq u \leq \min\left(1, \frac{3a + 1}{2}\right)$$

である。 $-1 \leq a \leq 1$  のとき、 $u = a$  はこの区間に含まれる。よって  $b = 2(u - a)^2 + a^2$  の最小値は  $a^2$  である。

最大値は許される区間の端点で起こる。端点と  $a$  との距離を比較する。 $-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}$  では、区間は  $-1 \leq u \leq \frac{3a + 1}{2}$  であり、 $u = -1$  の方が  $a$  から遠い。よって最大値は  $a^2 + 2(a + 1)^2$  である。 $-\frac{1}{3} \leq a \leq 0$  では、区間は  $\frac{3a - 1}{2} \leq u \leq \frac{3a + 1}{2}$  であり、左端の方が  $a$  から遠い。よって最大値は  $a^2 + 2\left(\frac{1 - a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{(1 - a)^2}{2}$  である。 $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$  では、同じ区間で右端の方が  $a$  から遠い。よって最大値は  $a^2 + 2\left(\frac{1 + a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{(1 + a)^2}{2}$  である。 $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$  では、区間は  $\frac{3a - 1}{2} \leq u \leq 1$  であり、 $u = 1$  の方が  $a$  から遠い。よって最大値は  $a^2 + 2(1 - a)^2$  である。

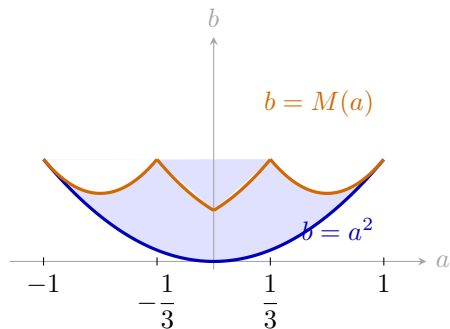
以上より、点  $(a, b)$  が  $D$  に属する条件は  $-1 \leq a \leq 1$ ,  $a^2 \leq b \leq M(a)$  である。ただし

$$M(a) = \begin{cases} a^2 + 2(a + 1)^2 & \left(-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}\right), \\ a^2 + \frac{(1 - a)^2}{2} & \left(-\frac{1}{3} \leq a \leq 0\right), \\ a^2 + \frac{(1 + a)^2}{2} & \left(0 \leq a \leq \frac{1}{3}\right), \\ a^2 + 2(1 - a)^2 & \left(\frac{1}{3} \leq a \leq 1\right) \end{cases}$$

である。

**(2)**

求める領域は、横軸を  $a$ 、縦軸を  $b$  と見ると、 $-1 \leq a \leq 1$  において、下側を放物線  $b = a^2$  で、上側を (1) の折れ目をもつ曲線  $b = M(a)$  で囲まれる部分である。上側境界は  $a = -1/3, 0, 1/3$  で式が切り替わるので、図示ではこの 3 点を境に 4 つの放物線弧をつなぐ。



下端は  $P = Q$  のときの  $b = a^2$ 、上端は許容区間の遠い端点で決まる。

## ▶ 解法 2 (中心からのずれで対称化)

### 【方針】

$u = a + w$  と置くと内分条件から  $v = a - 2w$  となり、 $b = a^2 + 2w^2$  と一気に整理できる。あとは  $u, v \in [-1, 1]$  が与える  $w$  の区間で  $|w|$  の最大値を調べる。

### 【解答】

(1)

$P = (u, u^2), Q = (v, v^2)$  とする。内分点  $R = (a, b)$  について

$$a = \frac{2u + v}{3}$$

だから、 $u = a + w$  とおけば  $v = a - 2w$  である。したがって

$$\begin{aligned} b &= \frac{2(a + w)^2 + (a - 2w)^2}{3} \\ &= a^2 + 2w^2. \end{aligned}$$

$-1 \leq u, v \leq 1$  より

$$\max \left( -1 - a, \frac{a - 1}{2} \right) \leq w \leq \min \left( 1 - a, \frac{a + 1}{2} \right).$$

$-1 \leq a \leq 1$  では  $w = 0$  がこの区間に入るので、 $b$  の最小値は  $a^2$  である。最大値は  $|w|$  が大きい方の端点で生じ、端点の切り替わりを調べると

$$b \leq M(a), \quad M(a) = \begin{cases} a^2 + 2(a + 1)^2 & (-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}), \\ a^2 + \frac{(1 - a)^2}{2} & (-\frac{1}{3} \leq a \leq 0), \\ a^2 + \frac{(1 + a)^2}{2} & (0 \leq a \leq \frac{1}{3}), \\ a^2 + 2(1 - a)^2 & (\frac{1}{3} \leq a \leq 1). \end{cases}$$

よって領域  $D$  の必要十分条件は

$$-1 \leq a \leq 1, \quad a^2 \leq b \leq M(a)$$

である。

(2) この上下の境界を  $ab$  平面に描けば、解法 1 の図の領域を得る。

【総評】 難度 7, 計算量 7。内分点の座標を  $u, v$  で置き、 $v = 3a - 2u$  と消去して 1 変数の 2 次関数にするまでが第一関門である。その後は  $u$  の許される区間を正確に出し、 $u = a$  が常に含まれること、最大値は遠い端点で起こることを整理する。切り替わり  $a = -1/3, 0, 1/3$  を落とすと図示が崩れる。25 分から 30 分程度の重めの問題で、答案では下側境界と上側境界を別々に説明すると見通しがよい。

**【第 4 問】**

以下の問いに答えよ.

- (1) 実数  $a$  に対し, 2 次の正方行列  $A, P, Q$  が, 5 つの条件  $A = aP + (a+1)Q, P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = O, QP = O$  をみたすとする. ただし  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  である. このとき,  $(P+Q)A = A$  が成り立つことを示せ.
- (2)  $a$  は正の数として, 行列  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$  を考える. この  $A$  に対し, (1) の 5 つの条件をすべてみたす行列  $P, Q$  を求めよ.
- (3)  $n$  を 2 以上の整数とし,  $2 \leq k \leq n$  をみたす整数  $k$  に対して  $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$  とおく. 行列の積  $A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2$  を求めよ.

**▶ 解法 1**
**【方針】**

(1) は与式に左から  $P+Q$  を掛ける. (2) では  $A$  の可逆性から  $P+Q = I$  を得て,  $A = aI + Q$  から  $P, Q$  を一意に定める. (3) は  $A_k = kP + (k+1)Q$  と表し, 直交的な冪等関係で積を二成分に分ける.

**【解答】**

(1)

与えられた式より  $A = aP + (a+1)Q$  である. 左から  $P+Q$  を掛けると

$$\begin{aligned} (P+Q)A &= (P+Q)\{aP + (a+1)Q\} \\ &= a(P^2 + QP) + (a+1)(PQ + Q^2) \\ &= aP + (a+1)Q \\ &= A \end{aligned}$$

である. よって  $(P+Q)A = A$  が成り立つ.

(2)

いま

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

であり,  $a > 0$  だから  $\det A = a(a+1) > 0$  である. したがって  $A$  は逆行列をもつ.

(1) より  $(P+Q)A = A$  であるから, 右から  $A^{-1}$  を掛けて  $P+Q = I$  を得る. これを  $A = aP + (a+1)Q$  に代入すると  $A = a(P+Q) + Q = aI + Q$  である. よって

$$Q = A - aI = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり,

$$P = I - Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である.

実際に  $P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = O$  が直接確認できるので, 求める行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

(3)

(2) で得た  $P, Q$  は  $a$  によらない. したがって

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} = kP + (k+1)Q$$

と表せる。

また  $P^2 = P$ ,  $Q^2 = Q$ ,  $PQ = QP = O$  であるから, 積を展開したとき,  $P$  だけを選ぶ項と  $Q$  だけを選ぶ項以外はすべて  $O$  になる。よって

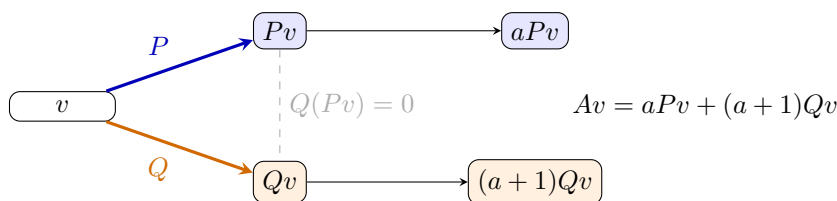
$$\begin{aligned} A_n A_{n-1} \cdots A_2 &= (nP + (n+1)Q)((n-1)P + nQ) \cdots (2P + 3Q) \\ &= n!P + \frac{(n+1)!}{2}Q \end{aligned}$$

である。

これに  $P, Q$  を代入すると

$$\begin{aligned} A_n A_{n-1} \cdots A_2 &= n! \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(n+1)!}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n! & 0 \\ \frac{(n-1)n!}{2} & \frac{(n+1)!}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。



$P, Q$  は互いを消す補完成分で、積では同じ成分だけが残る。

## ▶ 解法 2 ((3) を成分漸化式で計算)

### 【方針】

(1)(2) は解法 1 と同様に可逆性から  $P, Q$  を決める。(3) では射影分解を使わず、下三角行列の積の対角成分と左下成分を漸化式で追う。

### 【解答】

(1) 解法 1 と同様に、与式へ左から  $P + Q$  を掛けて

$$(P + Q)A = A$$

を得る。

(2)  $A$  は可逆なので  $P + Q = I$  である。したがって

$$Q = A - aI = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = I - Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3)  $B_k = A_k A_{k-1} \cdots A_2$  とおく。下三角行列の積なので

$$B_k = \begin{pmatrix} k! & 0 \\ y_k & \frac{(k+1)!}{2} \end{pmatrix}$$

と書ける。実際、対角成分は各対角成分の積である。

$B_k = A_k B_{k-1}$  の左下成分を比較すると

$$y_k = (k-1)! + (k+1)y_{k-1}, \quad y_2 = 1.$$

ここで

$$y_{k-1} = \frac{(k-2)(k-1)!}{2}$$

と仮定すれば

$$\begin{aligned} y_k &= (k-1)! + (k+1) \frac{(k-2)(k-1)!}{2} \\ &= \frac{(k-1)k!}{2}. \end{aligned}$$

$k = 2$  でも成り立つので、帰納法により

$$y_k = \frac{(k-1)k!}{2}.$$

ゆえに

$$A_n A_{n-1} \cdots A_2 = \begin{pmatrix} n! & 0 \\ \frac{(n-1)n!}{2} & \frac{(n+1)!}{2} \end{pmatrix}$$

である。

【総評】 難度 6, 計算量 5. 抽象的な条件に見えるが,  $P, Q$  が互いに混ざらない成分であることを利用する問題である。(2) では  $A$  が可逆であることを確認してから  $P + Q = I$  を導くのが重要で, ここを省くと論理が弱くなる。(3) は通常の行列積で押し切るより,  $P$  成分と  $Q$  成分に分けると一気に短くなる。別解の成分漸化式は検算に有効で, 20 分程度でまとめたい。

### 【第 5 問】

表が出る確率が  $p$ , 裏が出る確率が  $1-p$  であるような硬貨がある。ただし,  $0 < p < 1$  とする。この硬貨を投げて, 次のルール (R) の下で, ブロック積みゲームを行う。

- $$(R) \begin{cases} (i) & \text{ブロックの高さは, 最初は 0 とする。} \\ (ii) & \text{硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ,} \\ & \text{裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。} \end{cases}$$

$n$  を正の整数,  $m$  を  $0 \leq m \leq n$  をみたす整数とする。

- (1)  $n$  回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが  $m$  となる確率  $p_m$  を求めよ。
- (2) (1) で, 最後にブロックの高さが  $m$  以下となる確率  $q_m$  を求めよ。
- (3) ルール (R) の下で,  $n$  回の硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが  $m$  である確率  $r_m$  を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

### ▶ 解法 1

#### 【方針】

最後のブロックの高さは, 最後に連続して出ている表の個数である。 $m < n$  なら, 最後の高さが  $m$  になるには直前の  $n-m$  回目が裏で, その後  $m$  回が表で終わる必要がある。 $m = n$  は全回表の場合だけ別扱いにする。(2) は高さが  $m$  を超える事象を「最後の  $m+1$  回がすべて表」と読む。(3) は 2 回の独立な高さを  $X, Y$  とし, 最大値が  $m$  である確率を  $P(X \leq m, Y \leq m) - P(X \leq m-1, Y \leq m-1)$  として, 端点  $m = 0, n$  を分ける。

#### 【解答】

(1) 最後のブロックの高さは,  $n$  回目からさかのぼって最後に連続して出ている表の個数である。 $0 \leq m < n$  とする。最後の高さが  $m$  であるためには,  $n-m$  回目に裏が出て, その後の  $m$  回がすべて表であることが必要十分である。したがって  $p_m = (1-p)p^m$  ( $0 \leq m < n$ ) である。ここで  $m = 0$  のときは, 最後の 1 回が裏であることを表している。 $m = n$  のときは,  $n$  回すべて表が出る場合だけであるから  $p_n = p^n$  である。

(2)  $0 \leq m < n$  とする。高さが  $m$  を超えることは, 最後の  $m+1$  回がすべて表であることと同値である。よって余事象を用いて  $q_m = 1 - p^{m+1}$  ( $0 \leq m < n$ ) である。

また, 高さは最大でも  $n$  なので  $q_n = 1$  である。

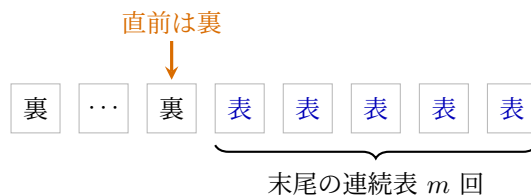
(3) 2 度の独立な試行で得られる最後の高さを  $X, Y$  とする。高い方のブロックの高さが  $m$  であることは,  $\max(X, Y) = m$  である。したがって分布関数の差を用いて  $P(\max(X, Y) = m) = P(X \leq m, Y \leq m) - P(X \leq m-1, Y \leq m-1)$  と表せる。 $m = 0$  のときは両方とも高さ 0 であればよいから  $r_0 = q_0^2 = (1-p)^2$  である。 $1 \leq m < n$  では, 2 回の試行は独立なので

$$\begin{aligned} r_m &= q_m^2 - q_{m-1}^2 \\ &= (1-p^{m+1})^2 - (1-p^m)^2 \end{aligned}$$



である。

最後に  $m = n$  では、高い方が  $n$  以下であることは常に成り立つので  $r_n = 1 - q_{n-1}^2 = 1 - (1 - p^n)^2$  である。



高さは試行列全体ではなく、末尾に連続する表の長さだけで決まる。

## ▶ 解法 2 (最大値を直接分類)

### 【方針】

2 回の高さを  $X, Y$  とし、 $\max(X, Y) = m$  を「一方だけが  $m$ 」と「両方が  $m$ 」に分ける。高さがちょうど  $m$  の確率  $p_m$  と、 $m - 1$  以下の確率  $q_{m-1}$  を使えば直接計算できる。

### 【解答】

(1) 最後に連続する表の回数が高さであるから

$$p_m = \begin{cases} (1-p)p^m & (0 \leq m < n), \\ p^n & (m = n), \end{cases}$$

(2) 高さが  $m$  以下である確率は、末尾  $m + 1$  回がすべて表となる事象の余事象なので

$$q_m = \begin{cases} 1 - p^{m+1} & (0 \leq m < n), \\ 1 & (m = n). \end{cases}$$

(3) 2 回の独立な試行の高さを  $X, Y$  とする。  $1 \leq m \leq n$  について、最大値が  $m$  となるのは

$$\begin{cases} X = m, Y \leq m - 1, \\ Y = m, X \leq m - 1, \\ X = Y = m \end{cases}$$

の互いに排反な 3 場合である。よって

$$r_m = 2p_m q_{m-1} + p_m^2.$$

したがって  $1 \leq m < n$  では

$$r_m = 2(1-p)p^m(1-p^m) + (1-p)^2 p^{2m},$$

$m = n$  では

$$r_n = 2p^n(1-p^n) + p^{2n} = 1 - (1-p^n)^2.$$

また  $m = 0$  では両方とも高さ 0 でなければならないから

$$r_0 = (1-p)^2.$$

これは解法 1 の  $q_m^2 - q_{m-1}^2$  と同じ分布を、最大値を取る側の分類から求めたものである。

**【総評】** 難度 5, 計算量 4。ゲームの高さを「末尾に連続する表の個数」と読み替えれば、確率計算はかなり整理される。(1) では  $m < n$  と  $m = n$  の違い, (2) では余事象の末尾  $m + 1$  回, (3) では最大値の分布を差で取ることが採点点である。端点  $m = 0$  と  $m = n$  を一般式に無理に押し込むと誤りやすいので、答案では明確に分けるのが安全である。15 分程度で完答したい。

**【第 6 問】**

以下の問いに答えよ。

- (1)  $0 < x < a$  をみたす実数  $x, a$  に対し、次を示せ。

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left( \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

- (2) (1) を利用して、次を示せ。

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

ただし、 $\log 2$  は 2 の自然対数を表す。

**▶ 解法 1**
**【方針】**

(1) は積分区間  $[a-x, a+x]$  を中心  $a$ 、半幅  $x$  の対称区間として見る。 $t = a+u$  と置き、 $u$  と  $-u$  の項を組にすると、被積分関数は  $1/(a-u) + 1/(a+u) = 2a/(a^2 - u^2)$  になる。これは  $u=0$  で最小、 $u=x$  に近づくほど大きくなるので、定数で上下から評価して積分する。(2) は

$$\log 2 = \int_1^2 dt/t$$

を  $[1, 3/2]$  と  $[3/2, 2]$  に分け、それぞれ  $(a, x) = (5/4, 1/4), (7/4, 1/4)$  として (1) を適用し、最後に有理数と小数を比較する。

**【解答】**

- (1)  $t = a+u$  とおく。 $0 < x < a$  なので、積分区間では  $t > 0$  であり、置換して

$$\int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt = \int_{-x}^x \frac{1}{a+u} du$$

となる。正負の  $u$  を組にすると

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \frac{1}{a+u} du &= \int_0^x \left( \frac{1}{a-u} + \frac{1}{a+u} \right) du \\ &= \int_0^x \frac{2a}{a^2 - u^2} du \end{aligned}$$

である。 $0 \leq u < x < a$  では  $a^2 - x^2 < a^2 - u^2 \leq a^2$  である。したがって  $\frac{2}{a} < \frac{2a}{a^2 - u^2} < \frac{2a}{a^2 - x^2}$  が、端点を除く区間で成り立つ。右端は  $\frac{2a}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}$  である。これを  $0 \leq u \leq x$  で積分すると、厳密な不等式として

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left( \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

を得る。

**(2)**

まず

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \int_1^{3/2} \frac{1}{t} dt + \int_{3/2}^2 \frac{1}{t} dt$$

と分ける。

- (1) を  $a = 5/4, x = 1/4$  に適用すると、区間  $[a-x, a+x] = [1, 3/2]$  であるから

$$\frac{2/4}{5/4} < \int_1^{3/2} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2}{3} \right)$$

すなわち

$$\frac{2}{5} < \int_1^{3/2} \frac{1}{t} dt < \frac{5}{12}$$

である。

また, (1) を  $a = 7/4, x = 1/4$  に適用すると, 区間  $[a - x, a + x] = [3/2, 2]$  であるから

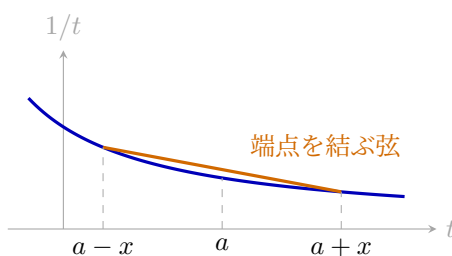
$$\frac{2/4}{7/4} < \int_{3/2}^2 \frac{1}{t} dt < \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right)$$

すなわち

$$\frac{2}{7} < \int_{3/2}^2 \frac{1}{t} dt < \frac{7}{24}$$

である。

2 つを足して  $\frac{2}{5} + \frac{2}{7} < \log 2 < \frac{5}{12} + \frac{7}{24}$  を得る。すなわち  $\frac{24}{35} < \log 2 < \frac{17}{24}$  である。ここで  $\frac{24}{35} > 0.68$  は  $2400 > 2380$  より成り立ち,  $\frac{17}{24} < 0.71$  は  $1700 < 1704$  より成り立つ。したがって  $0.68 < \log 2 < 0.71$  が示された。



$1/t$  は凸関数なので、中央の値が下側評価、端点を結ぶ弦が上側評価を与える。

## ▶ 解法 2 (凸性と弦による評価)

### 【方針】

$f(t) = 1/t$  は正の範囲で狭義凸である。対称点  $a - u, a + u$  の平均から下側を、区間両端を結ぶ弦から上側を評価し、積分する。(2) は同じ 2 区間へ適用する。

### 【解答】

(1)  $f(t) = 1/t$  とおくと

$$f''(t) = \frac{2}{t^3} > 0 \quad (t > 0)$$

であるから、 $f$  は狭義凸である。 $0 < u \leq x$  では凸性より

$$\frac{f(a - u) + f(a + u)}{2} > f(a)$$

なので

$$\int_{a-x}^{a+x} f(t) dt = \int_0^x \{f(a - u) + f(a + u)\} du > \frac{2x}{a}.$$

一方、凸関数のグラフは区間両端を結ぶ弦より下にある。弦の積分は台形の面積に等しいから

$$\int_{a-x}^{a+x} f(t) dt < 2x \cdot \frac{f(a - x) + f(a + x)}{2}.$$

よって

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{dt}{t} < x \left( \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right).$$

(2)  $[1, 2]$  を  $[1, 3/2]$ 、 $[3/2, 2]$  に分ける。(1) へ順に  $(a, x) = (5/4, 1/4), (7/4, 1/4)$  を代入すると

$$\frac{2}{5} < \int_1^{3/2} \frac{dt}{t} < \frac{5}{12}, \quad \frac{2}{7} < \int_{3/2}^2 \frac{dt}{t} < \frac{7}{24}.$$

したがって

$$\frac{24}{35} < \log 2 < \frac{17}{24}.$$

$24/35 > 0.68$ 、 $17/24 < 0.71$  だから

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

である。

**【総評】** 難度 5，計算量 4。誘導付きの積分評価で，中心  $a$  の左右を組にして  $2a/(a^2 - u^2)$  を作ることが核心である。評価の不等号は端点だけでなく区間内部で厳密に成り立つため，積分後も厳密な不等式になる。(2) では  $[1, 2]$  を半幅  $1/4$  の 2 区間に分ける発想が重要で，最後の小数比較は有理数のまま確認すると安全である。15 分程度で，計算よりも不等式の向きに注意したい。