

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 2008 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

座標平面の点 (x, y) を $(3x + y, -2x)$ へ移す移動 f を考え、点 P が移る行き先を $f(P)$ と表す。
 f を用いて直線 $l_0, l_1, l_2, \dots$ を以下のように定める。

- l_0 は直線 $3x + 2y = 1$ である。
- 点 P が l_n 上を動くとき、 $f(P)$ が描く直線を l_{n+1} とする ($n = 0, 1, 2, \dots$)。

以下 l_n を 1 次式を用いて $a_n x + b_n y = 1$ と表す。

- (1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。
- (2) 不等式 $a_n x + b_n y > 1$ が定める領域を D_n とする。 $D_0, D_1, D_2, \dots$ すべてに含まれるような点の範囲を図示せよ。

第 2 問

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき、次の操作 (A) を考える。

(A) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を、等確率 $\frac{1}{k}$ で選び出し、それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問 (1), (2) に答えよ。

- (1) 最初に白 2 枚、黒 2 枚、合計 4 枚のカードをもっているとき、操作 (A) を n 回繰り返した後、初めて、4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。
- (2) 最初に白 3 枚、黒 3 枚、合計 6 枚のカードをもっているとき、操作 (A) を n 回繰り返した後、初めて、6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

第 3 問

- (1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図 (平面図) を描け。
- (2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり, それぞれの面の重心を G_1, G_2 とする。 G_1, G_2 を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし, 各辺の長さは 1 とする。

第 4 問

放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

- (1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で, h を表せ。
- (2) L を固定したとき, h がとりうる値の最小値を求めよ。

第 5 問

自然数 n に対し,

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9} = \overbrace{111 \cdots 111}^{n\text{個}}$$

と表す。たとえば $R_1 = 1$, $R_2 = 11$, $R_3 = 111$ である。

- (1) m を 0 以上の整数とする。 R_{3^m} は 3^m で割り切れるが、 3^{m+1} では割り切れないことを示せ。
- (2) R_n が 27 で割り切れることが、 n が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

第 6 問

座標平面において，媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)