

東京大学 2008 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面の点 (x, y) を $(3x + y, -2x)$ へ移す移動 f を考え、点 P が移る行き先を $f(P)$ と表す。 f を用いて直線 $l_0, l_1, l_2, \dots$ を以下のように定める。

- l_0 は直線 $3x + 2y = 1$ である。
- 点 P が l_n 上を動くとき、 $f(P)$ が描く直線を l_{n+1} とする ($n = 0, 1, 2, \dots$)。

以下 l_n を 1 次式を用いて $a_n x + b_n y = 1$ と表す。

- (1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。
- (2) 不等式 $a_n x + b_n y > 1$ が定める領域を D_n とする。 $D_0, D_1, D_2, \dots$ すべてに含まれるような点の範囲を図示せよ。

【方針】

(1) は点の像を直接追うより、像の座標 (X, Y) から元の座標 (x, y) を戻し、元の直線 $a_n x + b_n y = 1$ に代入して係数を読む。右辺を 1 に保ったまま係数列 (a_n, b_n) が定まる点を確認する。(2) では係数列を明示し、 $a_n x + b_n y = x + y + 2^{-n}(2x + y)$ に直す。無限個の不等式は、 $n = 0$ の条件と $n \rightarrow \infty$ で必要になる条件を取り出し、逆向きは凸結合の形で全ての n を同時に確認する。

【解答】

(1) f による像の座標を (X, Y) とおく。すなわち $X = 3x + y, \quad Y = -2x$ である。これを元の座標について解くと、 $x = -\frac{Y}{2}, \quad y = X + \frac{3Y}{2}$ である。

点 (x, y) が l_n 、すなわち $a_n x + b_n y = 1$ 上にあるとき、像 (X, Y) は $a_n \left(-\frac{Y}{2}\right) + b_n \left(X + \frac{3Y}{2}\right) = 1$ を満たす。整理すると $b_n X + \frac{3b_n - a_n}{2} Y = 1$ である。したがって、像の直線 l_{n+1} を $a_{n+1} X + b_{n+1} Y = 1$ と書けば、 $a_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = \frac{3b_n - a_n}{2}$ である。文字 (X, Y) を再び (x, y) と書けば、これが求める関係式である。

(2) l_0 は $3x + 2y = 1$ であるから、 $a_0 = 3, \quad b_0 = 2$ である。(1) の関係式から $a_{n+1} = b_n$ なので、 $a_{n+2} = b_{n+1} = \frac{3b_n - a_n}{2} = \frac{3a_{n+1} - a_n}{2}$ すなわち $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ である。初期値 $a_0 = 3, a_1 = 2$ から $a_n = 1 + 2^{1-n}$ が得られる。実際、この式は $n = 0, 1$ で初期値を満たし、上の漸化式にも代入して確かめられる。さらに $b_n = a_{n+1}$ より $b_n = 1 + 2^{-n}$ である。

したがって

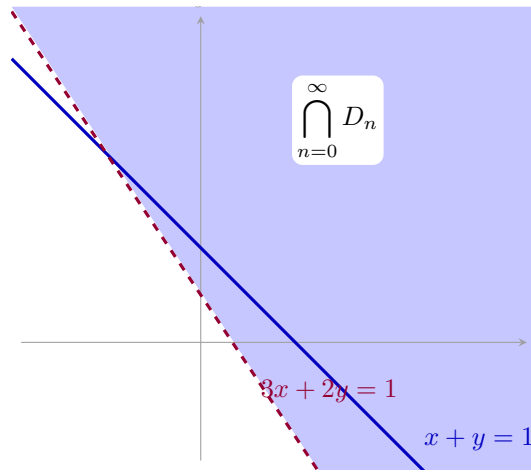
$$\begin{aligned} a_n x + b_n y &= (1 + 2^{1-n})x + (1 + 2^{-n})y \\ &= x + y + 2^{-n}(2x + y) \\ &= (1 - 2^{-n})(x + y) + 2^{-n}(3x + 2y) \end{aligned}$$

である。

すべての D_n に含まれる点は、すべての n について $a_n x + b_n y > 1$ を満たす点である。特に $n = 0$ から $3x + 2y > 1$ が必要である。また n を大きくすると $2^{-n} \rightarrow 0$ だから、もし $x + y < 1$ なら十分大きい n で $a_n x + b_n y < 1$ となってしまう。よって $x + y \geq 1$ も必要である。

逆に $3x + 2y > 1, \quad x + y \geq 1$ が成り立つとする。このとき任意の $n \geq 0$ について $a_n x + b_n y = (1 - 2^{-n})(x + y) + 2^{-n}(3x + 2y)$ であり、 $0 < 2^{-n} \leq 1$ である。右辺は、 $x + y \geq 1$ と $3x + 2y > 1$ の重み付き平均で、しかも後者の重み 2^{-n} は正であるから、 $a_n x + b_n y > 1$ となる。

したがって求める範囲は $x + y \geq 1, \quad 3x + 2y > 1$ を同時に満たす点全体である。図示すると、直線 $x + y = 1$ の上側の半平面は境界を含み、直線 $3x + 2y = 1$ の上側の半平面は境界を含まない。その共通部分が答えである。



青い共通部分が答え。実線 $x + y = 1$ は含み、破線 $3x + 2y = 1$ は含まない。

【総評】 直線の像を出す場面で、点の移動と直線係数の移動を混同しないことが第一の注意点である。想定時間は 15 分から 20 分、難易度は 6、計算量は 5 程度。(2) の核心は、無限個の半平面を $n = 0$ の境界と極限の境界の 2 本で表すことにある。 $x + y = 1$ は含まれる一方、 $3x + 2y = 1$ は D_0 が開半平面なので含まれない。この境界の開閉を図に反映できるかが答案の仕上がりを左右する。

【第 2 問】

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき、次の操作 (A) を考える。

(A) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を、等確率 $\frac{1}{k}$ で選び出し、それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問 (1), (2) に答えよ。

- (1) 最初に白 2 枚、黒 2 枚、合計 4 枚のカードをもっているとき、操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて、4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。
- (2) 最初に白 3 枚、黒 3 枚、合計 6 枚のカードをもっているとき、操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて、6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は 4 枚の場合で、未終了状態を 2 対 2 と 1 対 3 の 2 種類にまとめる。終了は 1 対 3 から少数色を選んだときだけ起こるので、初到達確率は未終了確率から取り出す。(2) は 6 枚の場合で、未終了状態を 3 対 3, 2 対 4, 1 対 5 の 3 種類にまとめる。1 対 5 から少数色を選ぶ確率 $1/6$ が終了確率であり、漸化式または 2 回 1 組の戻り確率から一般項を求める。

【解答】

(1)

途中で 4 枚とも同じ色になったものは以後数えない。未終了のまま n 回後に白黒が 2 枚ずつである確率を q_n 、白黒が 1 枚と 3 枚に分かれている確率を r_n とする。初期条件は $q_0 = 1$, $r_0 = 0$ である。

白黒 2 枚ずつの状態からは、どのカードを選んでも白黒 1 枚と 3 枚の状態になる。白黒 1 枚と 3 枚の状態からは、少数色の 1 枚を選ぶと確率 $1/4$ で同色 4 枚になり、多数色の 3 枚のどれかを選ぶと確率 $3/4$ で白黒 2 枚ずつに戻る。したがって未終了確率は $q_{n+1} = \frac{3}{4}r_n$, $r_{n+1} = q_n$ を満たし、 $n + 1$ 回目に初めて同色 4 枚になる確率は $\frac{1}{4}r_n$ である。

この漸化式から

$$q_{2j} = \left(\frac{3}{4}\right)^j, \quad r_{2j+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

である。よって求める確率は

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} & (n \text{ が偶数}, n \geq 2), \\ 0 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である。

(2)

6 枚の場合も、色の名前ではなく枚数の分かれ方だけを見る。未終了のまま n 回後に、白黒が 3 枚と 3 枚、2 枚と 4 枚、1 枚と 5 枚に分かれている確率をそれぞれ a_n , b_n , c_n とする。初期条件は $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ である。

各状態からの推移を調べる。3 対 3 からはどのカードを選んでも 2 対 4 になる。2 対 4 からは、多数色の 4 枚のどれかを選ぶと確率 $4/6 = 2/3$ で 3 対 3 に戻り、少数色の 2 枚のどれかを選ぶと確率 $2/6 = 1/3$ で 1 対 5 になる。1 対 5 からは、多数色を選ぶと確率 $5/6$ で 2 対 4 に戻り、少数色を選ぶと確率 $1/6$ で同色 6 枚になって終了する。

したがって未終了確率について

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}b_n, \quad b_{n+1} = a_n + \frac{5}{6}c_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{6}b_n$$

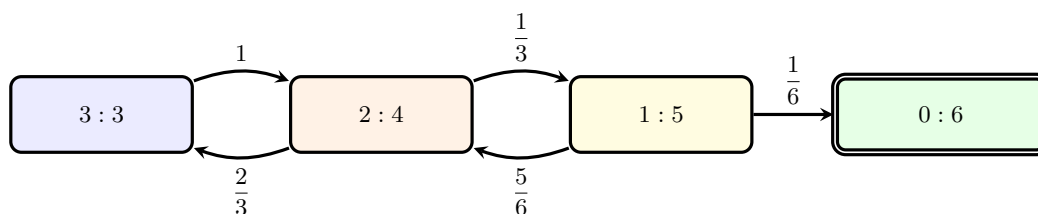
が成り立ち、 $n+1$ 回目に初めて同色 6 枚になる確率は $\frac{1}{6}c_n$ である。 $n \geq 1$ では、 a_n と c_n はともに b_{n-1} から作られ、 $a_n = \frac{2}{3}b_{n-1}$, $c_n = \frac{1}{3}b_{n-1}$ だから $a_n = 2c_n$ である。よって $b_{n+1} = a_n + \frac{5}{6}c_n = \frac{17}{6}c_n = \frac{17}{18}b_{n-1}$ となる。初期状態から $b_1 = 1$ であるため、 $b_{2j-1} = \left(\frac{17}{18}\right)^{j-1}$ ($j = 1, 2, \dots$) であり、さらに

$$c_{2j} = \frac{1}{3}b_{2j-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{17}{18}\right)^{j-1}$$

である。 n 回目に初めて同色 6 枚になるには、 $n-1$ 回後に c 型で、最後に少数色を選ぶ必要がある。したがって $n = 2j+1$ ($j \geq 1$) のとき、 $\frac{1}{6}c_{2j} = \frac{1}{18} \left(\frac{17}{18}\right)^{j-1}$ であり、偶数回では終了できない。よって求める確率は

$$\begin{cases} \frac{1}{18} \left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n \text{ が奇数, } n \geq 3), \\ 0 & (n \text{ が偶数, または } n = 1) \end{cases}$$

である。



6 枚の場合の未終了状態と吸収状態。矢印上は 1 回の操作で移る確率。

▶ 解法 2 (2 回遷移をまとめる方法)

【方針】

(1) は 2 回ごとに 2:2 へ戻るか終了するかを見る。(2) も初回で 2:4 へ移った後、2 回ごとに 2:4 へ戻るか終了するかを見る。各 2 回組の「戻る確率」と「終了確率」を直接計算すれば、初到達確率は等比数列になる。

【解答】

(1) 白黒 2:2 から 1 回で必ず 1:3 へ移り、次の 1 回で確率 $\frac{1}{4}$ で終了し、確率 $\frac{3}{4}$ で 2:2 に戻る。したがって $n = 2j$ のとき、最初の $j - 1$ 組で戻り、最後の組で終了する確率は

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1} \frac{1}{4}$$

である。奇数回では終了できない。よって

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} & (n \text{ が偶数}, n \geq 2), \\ 0 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

となる。

(2) 白黒 3:3 から初回で必ず 2:4 へ移る。2:4 から続く 2 回で再び 2:4 へ戻る経路は

$$2:4 \longrightarrow 3:3 \longrightarrow 2:4, \quad 2:4 \longrightarrow 1:5 \longrightarrow 2:4$$

の 2 つで、その確率の和は

$$\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{17}{18}$$

である。一方、この 2 回で初めて終了する確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

である。

したがって $n = 2j + 1$ ($j \geq 1$) のとき、初回の後に $j - 1$ 組だけ戻り、最後の組で終了する確率は

$$\left(\frac{17}{18}\right)^{j-1} \frac{1}{18}.$$

偶数回および $n = 1$ では終了できないので、答えは

$$\begin{cases} \frac{1}{18} \left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n \text{ が奇数}, n \geq 3), \\ 0 & (n \text{ が偶数、または } n = 1) \end{cases}$$

である。

【総評】 文系第 2 問の拡張だが、6 枚では状態が 1 種類増えるため、推移を表に近い形で整理する力が問われる。想定時間は 20 分前後、難易度は 7、計算量は 6 程度。1 対 5 に到達した時点で終了ではなく、次に少数色を選んだときに初めて終了する点が典型的な落とし穴である。偶奇については、4 枚は偶数回、6 枚は奇数回にしか終了しないので、式の適用範囲と最小回数を答案中に必ず明示したい。

【第 3 問】

- (1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図 (平面図) を描け。
- (2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり、それぞれの面の重心を G_1, G_2 とする。 G_1, G_2 を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし、各辺の長さは 1 とする。

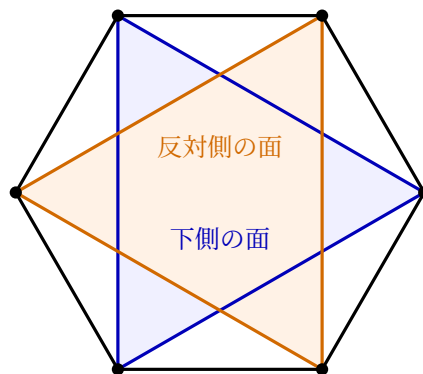
【方針】

(1) は正八面体を、互いに平行な上下 2 つの正三角形がずれて重なったものとして真上から見る。外枠は正六角形になり、1 つおきの頂点を結ぶ 2 つの正三角形が見える。(2) は正八面体の頂点を座標軸上に置き、互いに平行な 2 面の重心を結ぶ軸を $X = Y = Z$ として扱う。軸に垂直な平面で切った断面を軸のまわりに回転すると円板になるので、その半径を断面の頂点から求め、軸方向に 1 変数で積分して体積を出す。

【解答】

(1)

正八面体を 1 つの面を下にして置くと、その面と、それに平行な反対側の面が上下にある。真上から見ると、この 2 つの正三角形の投影が互いに逆向きに重なり、外枠は正六角形になる。したがって平面図は、正六角形の 1 つおきの頂点を結んだ 2 つの正三角形が重なった図である。



真上から見た平面図。外周は正六角形で、互いに逆向きの正三角形が重なる。

(2)

正八面体を、6 つの頂点 $(\pm a, 0, 0), (0, \pm a, 0), (0, 0, \pm a)$ をもつ立体として座標空間に置く。このとき隣り合う頂点間の距離は $a\sqrt{2}$ である。辺の長さが 1 だから $a\sqrt{2} = 1$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

この正八面体は $|X| + |Y| + |Z| \leq a$ で表される。互いに平行な 2 面として $X + Y + Z = a$, $X + Y + Z = -a$ 上の面を考えてよい。これらの面の重心はそれぞれ

$$\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right), \quad \left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$$

であるから、回転軸は $X = Y = Z$ である。

軸方向の座標を $s = \frac{X+Y+Z}{\sqrt{3}}$ とおく。正八面体では $-a \leq X+Y+Z \leq a$ なので、 $-\frac{a}{\sqrt{3}} \leq s \leq \frac{a}{\sqrt{3}}$ である。 $X+Y+Z = \sqrt{3}s$ で切った断面を考える。この断面は軸上の点を含む多角形であり、軸のまわりに回転すると、半径が断面内で軸から最も遠い点までの距離である円板を作る。その半径を R とする。

断面の頂点の 1 つは、 $Z = 0$ かつ $|X| + |Y| = a$ を満たす点 $\left(\frac{a+\sqrt{3}s}{2}, \frac{\sqrt{3}s-a}{2}, 0\right)$ である。この点の軸への正射影は、軸方向座標が s の点であるから、原点からの距離の二乗から s^2 を引けば、軸からの距離の二乗になる。よって

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{a+\sqrt{3}s}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}s-a}{2}\right)^2 - s^2 \\ &= \frac{a^2 + 3s^2}{2} - s^2 \\ &= \frac{a^2 + s^2}{2}. \end{aligned}$$

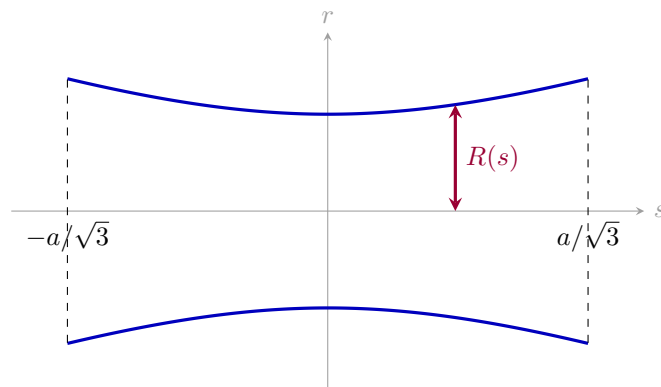
したがって、求める回転体の体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \pi R^2 ds \\ &= \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} (a^2 + s^2) ds \\ &= \pi \left(\frac{a^3}{\sqrt{3}} + \frac{a^3}{9\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{10\pi a^3}{9\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

ここで $a = 1/\sqrt{2}$ だから $a^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ であり、

$$V = \frac{10\pi}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{9\sqrt{6}}$$

である。



軸を含む平面で見た回転体。軸位置 s の断面は半径 $R(s)$ の円板になる。

【総評】 (1) の平面図を正六角形として捉えられると、(2) でも面の重心を結ぶ軸が 3 回対称の軸であることが見えやすい。想定時間は 25 分前後、難易度は 7、計算量は 6 程度。難所は正八面体そのものの断面積を積分するのではなく、断面を回転してできる円板の半径を求める点である。座標を置く場合は、辺の長さから $a = 1/\sqrt{2}$ を決めること、軸方向の座標 s と通常の距離を混同しないこと、積分範囲が $[-a/\sqrt{3}, a/\sqrt{3}]$ になることを丁寧に書くことと安定する。

【第 4 問】

放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

- (1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で、 h を表せ。
- (2) L を固定したとき、 h がとりうる値の最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

放物線上の 2 点を $P(u, u^2), Q(v, v^2)$ とおき、和 $u + v$ と差 $v - u$ で整理する。傾きは $m = u + v$ となり、長さは $L^2 = (v - u)^2(1 + m^2)$ で表せる。中点の y 座標は $(u^2 + v^2)/2$ なので、 $u + v$ と $u - v$ に直せば L, m の式が得られる。(2) では $t = 1 + m^2 \geq 1$ とおき、 $t - 1 + L^2/t$ の最小値を、 $t = L$ が許されるかどうかで場合分けする。

【解答】

(1)

放物線 $y = x^2$ 上の 2 点を $P(u, u^2), Q(v, v^2)$ とおく。線分の傾きが定まっているので $u \neq v$ としてよい。

傾き m は $m = \frac{v^2 - u^2}{v - u} = u + v$ である。また線分の長さ L について

$$\begin{aligned} L^2 &= (v - u)^2 + (v^2 - u^2)^2 \\ &= (v - u)^2 + \{(v - u)(v + u)\}^2 \\ &= (v - u)^2 \{1 + (u + v)^2\} \end{aligned}$$

だから、 $(v - u)^2 = \frac{L^2}{1 + m^2}$ である。

中点の y 座標は $h = \frac{u^2 + v^2}{2}$ である。ここで $u^2 + v^2 = \frac{(u + v)^2 + (u - v)^2}{2}$ より、

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(u + v)^2 + (u - v)^2}{2} \\ &= \frac{1}{4} \left(m^2 + \frac{L^2}{1 + m^2} \right). \end{aligned}$$

これが求める式である。

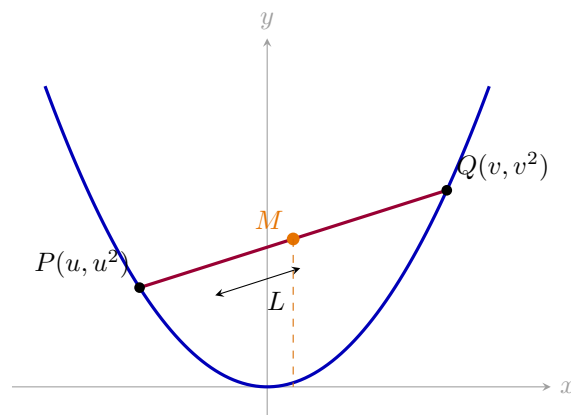
(2) $t = 1 + m^2$ とおくと $t \geq 1$ であり、(1) の式は $h = \frac{1}{4} \left(t - 1 + \frac{L^2}{t} \right)$ となる。逆に任意の $t \geq 1$ に対して $m^2 = t - 1$ となる m が取れるので、この t の範囲で最小化すればよい。 $g(t) = t - 1 + \frac{L^2}{t}$ とおく。 $t > 0$ で $g'(t) = 1 - \frac{L^2}{t^2}$ である。まず $0 < L \leq 1$ のとき、 $t \geq 1$ では $t \geq L$ だから $g'(t) \geq 0$ である。したがって $g(t)$ は $t \geq 1$ で増加し、最小値は $t = 1$ で $g(1) = L^2$ である。よって $h_{\min} = \frac{L^2}{4}$ である。

次に $L \geq 1$ のとき、 $g'(t) < 0$ は $1 \leq t < L$ 、 $g'(t) > 0$ は $t > L$ で成り立つ。したがって最小値は $t = L$ で得られ、 $g(L) = L - 1 + L = 2L - 1$ である。よって $h_{\min} = \frac{2L - 1}{4}$ である。

以上より、 L を固定したときの h の最小値は

$$\begin{cases} \frac{L^2}{4} & (0 < L \leq 1), \\ \frac{2L - 1}{4} & (L \geq 1) \end{cases}$$

である。 $L = 1$ では2つの式はいずれも $1/4$ になり、一致する。



$m = u + v$ 、 $(v - u)^2 = L^2 / (1 + m^2)$ として中点の高さ h を表す。

▶ 解法 2 (平方完成と相加相乗平均)

【方針】

(1) で得た h を $t = 1 + m^2 \geq 1$ によって表す。 $L \geq 1$ では相加相乗平均により内部の等号点 $t = L$ が使える。 $0 < L \leq 1$ ではその点が定義域の外なので、差を因数分解して端点 $t = 1$ が最小であることを示す。

【解答】

(1) 解法 1 と同様に $P(u, u^2), Q(v, v^2)$ とおくと

$$m = u + v, \quad (v - u)^2 = \frac{L^2}{1 + m^2}$$

である。したがって

$$h = \frac{1}{4} \left(m^2 + \frac{L^2}{1 + m^2} \right)$$

を得る。

(2) $t = 1 + m^2 \geq 1$ とおけば

$$4h = t - 1 + \frac{L^2}{t}.$$

まず $L \geq 1$ のとき、相加相乗平均より

$$t + \frac{L^2}{t} \geq 2L$$

であり、等号は $t = L \geq 1$ で実現する。よって

$$h_{\min} = \frac{2L - 1}{4}.$$

次に $0 < L \leq 1$ とする。 $t \geq 1$ に対して

$$\left(t - 1 + \frac{L^2}{t} \right) - L^2 = \frac{(t - 1)(t - L^2)}{t} \geq 0$$

であり、等号は $t = 1$ で実現する。したがって

$$h_{\min} = \frac{L^2}{4}.$$

以上より

$$h_{\min} = \begin{cases} \frac{L^2}{4} & (0 < L \leq 1), \\ \frac{2L - 1}{4} & (L \geq 1) \end{cases}$$

である。

【総評】 放物線の 2 点を u, v で置けば、傾きが $u + v$ になるため計算はかなり整理される。想定時間は 12 分から 15 分、難易度は 5、計算量は 4 程度。注意点は、 L^2 に $(v - u)^2$ と $(v^2 - u^2)^2$ の両方が入ること、 h を $(u + v)^2$ と $(u - v)^2$ で表すこと、そして $t = 1 + m^2$ の範囲が $t \geq 1$ に制限されることである。 $L = 1$ を境に最小点が内部から端点へ切り替わるため、場合分けを省かないことが採点上重要である。

【第 5 問】

自然数 n に対し、

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9} = \overbrace{111 \cdots 111}^{n \text{ 個}}$$

と表す。たとえば $R_1 = 1$, $R_2 = 11$, $R_3 = 111$ である。

- (1) m を 0 以上の整数とする。 R_{3^m} は 3^m で割り切れるが、 3^{m+1} では割り切れないことを示せ。
 (2) R_n が 27 で割り切れることが、 n が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

【方針】

$R_{3N} = R_N(10^{2N} + 10^N + 1)$ という分解を使い、添字を 3 倍したときに 3 で割れる回数がちょうど 1 回増えることを示す。後ろの因子は $10^N \equiv 1 \pmod{9}$ から 3 では割れるが 9 では割れない。(2) では $n = 3^m q$, $3 \nmid q$ と分け、 $R_n = R_{3^m}$ に残りの等比和を掛けた形にする。残りの等比和は 3 で割ると q と同じ余りになるため、 R_n の 3 で割れる回数は R_{3^m} と同じになる。

【解答】

(1)

まず $m = 0$ のとき、 $R_1 = 1$ である。これは $3^0 = 1$ で割り切れるが、 $3^1 = 3$ では割り切れない。

次に、ある $m \geq 0$ で $R_{3^m} = 3^m u$ と書け、 u が 3 で割り切れないと仮定する。 $N = 3^m$ とおくと、

$$\begin{aligned} R_{3N} &= \frac{10^{3N} - 1}{9} \\ &= \frac{10^N - 1}{9} (10^{2N} + 10^N + 1) \\ &= R_N (10^{2N} + 10^N + 1) \end{aligned}$$

である。

ここで $10 \equiv 1 \pmod{9}$ だから $10^N \equiv 1 \pmod{9}$ であり、 $10^{2N} + 10^N + 1 \equiv 1 + 1 + 1 = 3 \pmod{9}$ となる。したがって $10^{2N} + 10^N + 1 = 3v$ と書け、 v は 3 で割り切れない。

よって $R_{3^{m+1}} = R_{3N} = 3^m u \cdot 3v = 3^{m+1} uv$ であり、 uv は 3 で割り切れない。したがって $R_{3^{m+1}}$ は 3^{m+1} で割り切れるが、 3^{m+2} では割り切れない。数学的帰納法により、すべての $m \geq 0$ で主張が成り立つ。

(2)

自然数 n を $n = 3^m q$ と書く。ただし m は 0 以上の整数、 q は 3 で割り切れない自然数である。 R_n を R_{3^m} でくくると、 $R_n = R_{3^m} (10^{(q-1)3^m} + 10^{(q-2)3^m} + \cdots + 10^{3^m} + 1)$ である。括弧内には q 個の項がある。各項は 3 で割ると 1 余るので、括弧内全体は 3 で割ると q と同じ余りをもつ。 q は 3 で割り切れないから、この括弧内も 3 で割り切れない。

(1) より、 R_{3^m} は 3^m で割り切れるが 3^{m+1} では割り切れない。さらに括弧内は 3 で割り切れないので、 R_n も 3^m で割り切れるが 3^{m+1} では割り切れない。

したがって R_n が $27 = 3^3$ で割り切れることは $m \geq 3$ と同値である。一方、 $n = 3^m q$ かつ $3 \nmid q$ であるから、 n が 27 で割り切れることも $m \geq 3$ と同値である。

以上より、 R_n が 27 で割り切れることは、 n が 27 で割り切れるための必要十分条件である。

【総評】 レピュニットの割り切れ方を、桁数の 3 の因数へ正確に戻す整数問題である。想定時間は 20 分前後、難易度は 7、計算量は 5 程度。 $R_{3N} = R_N(10^{2N} + 10^N + 1)$ に気づけば (1) は帰納法で処理できるが、後ろの因子が「3 で割れる」だけでなく「9 では割れない」ことを $\pmod{9}$ で示す必要がある。(2) では $n = 3^m q$ と分けた後、残りの等比和が 3 で割れないことを確認するのが核心である。高度な定理名に頼らず、合同式と因数分解で完結する答案が最も安定する。

【第 6 問】

座標平面において、媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。

▶ 解法 1
【方針】

まず曲線の通過点と符号を確認し、 $0 \leq t \leq \pi$ が上側の閉曲線、 $\pi \leq t \leq 2\pi$ が下側の閉曲線を作ることを押さえる。上側では同じ x 座標を与える 2 つの媒介変数 t と $\pi - t$ を対応させると、縦の長さが $(\pi - 2t) \sin t$ になる。下側でも $\pi + t$ と $2\pi - t$ を対応させると同じ縦の長さになるため、上下の面積は等しい。あとは $x = \cos 2t$ から横幅 $-dx = 4 \sin t \cos t dt$ を用い、1 変数積分で上側の面積を求めて 2 倍する。

【解答】

$t = 0, \pi, 2\pi$ ではいずれも $(x, y) = (1, 0)$ である。また $0 < t < \pi$ では $\sin t > 0$ より $y = t \sin t > 0$ 、 $\pi < t < 2\pi$ では $\sin t < 0$ より $y = t \sin t < 0$ である。したがって $0 \leq t \leq \pi$ の部分が上側の閉曲線、 $\pi \leq t \leq 2\pi$ の部分が下側の閉曲線を作る。

まず上側の面積を求める。 $0 \leq t \leq \pi/2$ に対して、 t と $\pi - t$ は同じ x 座標を与える。実際、 $\cos 2(\pi - t) = \cos 2t$ である。この 2 点の y 座標は $t \sin t$ 、 $(\pi - t) \sin t$ であるから、縦の長さは $(\pi - t) \sin t - t \sin t = (\pi - 2t) \sin t$ である。

また、 $0 \leq t \leq \pi/2$ では $x = \cos 2t$ は 1 から -1 へ減少する。したがって横方向の微小幅は $-dx = -\frac{dx}{dt} dt = 2 \sin 2t dt = 4 \sin t \cos t dt$ である。よって上側の面積を A とすると、

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} (\pi - 2t) \sin^2 t \cos t dt$$

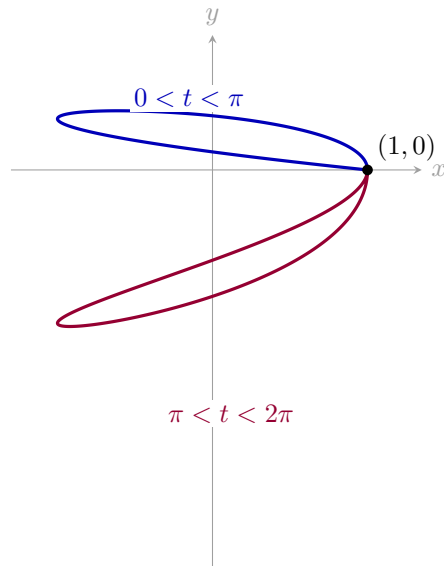
である。

ここで $d(\sin^3 t) = 3 \sin^2 t \cos t dt$ より、部分積分を用いて

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (\pi - 2t) d(\sin^3 t) \\ &= \frac{4}{3} \left[(\pi - 2t) \sin^3 t \right]_0^{\pi/2} + \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \sin t (1 - \cos^2 t) dt \\ &= \frac{8}{3} \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

次に下側について確認する。 $0 \leq t \leq \pi/2$ に対して $\pi + t$ と $2\pi - t$ は同じ x 座標を与え、それぞれの y 座標は $-(\pi + t) \sin t$ 、 $-(2\pi - t) \sin t$ である。したがって縦の長さは $-(\pi + t) \sin t + (2\pi - t) \sin t = (\pi - 2t) \sin t$ となり、上側と同じである。横幅も同じなので、下側の面積も $16/9$ である。

よって曲線が囲む領域の面積の合計は $2A = 2 \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{9}$ である。



曲線は $(1, 0)$ を共有する上下 2 つの閉曲線を描く。色は媒介変数の区間を示す。

▶ 解法 2 (媒介変数の線積分)

【方針】

各閉曲線の符号付き面積を、媒介変数による線積分で求める。上側は $0 \leq t \leq \pi$ 、下側は $\pi \leq t \leq 2\pi$ で閉じる。部分積分で端点項が消えることを確認し、両者の絶対値を加える。

【解答】

上側の閉曲線では $0 \leq t \leq \pi$ であり、

$$\begin{aligned} \int y \, dx &= \int_0^\pi t \sin t (-2 \sin 2t) \, dt \\ &= -4 \int_0^\pi t \sin^2 t \cos t \, dt \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^\pi t \, d(\sin^3 t) \\ &= \frac{4}{3} \int_0^\pi \sin^3 t \, dt = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

端点では $\sin t = 0$ なので、部分積分の境界項は 0 である。

下側では $\pi \leq t \leq 2\pi$ だから

$$\begin{aligned} \int y \, dx &= -4 \int_\pi^{2\pi} t \sin^2 t \cos t \, dt \\ &= \frac{4}{3} \int_\pi^{2\pi} \sin^3 t \, dt = -\frac{16}{9}. \end{aligned}$$

符号が反対になるのは曲線を回る向きが反対だからであり、面積は絶対値を取る。よって囲まれる 2 領域の面積の合計は

$$\left| \frac{16}{9} \right| + \left| -\frac{16}{9} \right| = \frac{32}{9}$$

である。

【総評】 媒介変数表示の面積問題だが、最初に曲線が上下 2 つの閉曲線を作ることを確認しないと、積分区間を誤りやすい。想定時間は 18 分前後、難易度は 6、計算量は 5 程度。 t と $\pi - t$ を対応させる上側の縦割り、 $\pi + t$ と $2\pi - t$ を対応させる下側の縦割りが本問の中心である。下側は $y = t \sin t$ の係数 t が大きくなるため一見上側と非対称に見えるが、対応する 2 点の差は同じ $(\pi - 2t) \sin t$ になる。この確認を省くと「上下の面積が等しい」という主張が根拠不足になる。