

東京大学 2009 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

自然数 $m \geq 2$ に対し、 $m-1$ 個の二項係数

$${}_m C_1, \quad {}_m C_2, \quad \dots, \quad {}_m C_{m-1}$$

を考え、これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

- (1) m が素数ならば、 $d_m = m$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数 k に対し、 $k^m - k$ が d_m で割り切れることを、 k に関する数学的帰納法によって示せ。
- (3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。

【方針】

(1)(2) は文系第 2 問と同じ構造で、素数の場合は $r {}_m C_r = {}_{m-1} C_{r-1}$ 、帰納法では二項定理を使う。(3) では d_m に含まれる素因数を調べる。奇素数 p については $m = p^q v$ と書き、特定の二項係数 ${}_m C_{p^q}$ が p で割り切れないことを、分子と分母に現れる p の個数を比較して示す。さらに 2 について、 $m = 2^q v$ で $v > 1$ なら奇数の二項係数を作り、 $m = 2^q$ なら 4 で割り切れない二項係数を作る。

【解答】

(1)

m を素数とする。 $1 \leq r \leq m-1$ では r と m は互いに素である。二項係数には $r {}_m C_r = {}_{m-1} C_{r-1}$ という関係があるので、 $r {}_m C_r$ は m で割り切れる。 r と m が互いに素であるから、 ${}_m C_r$ が m で割り切れる。

よって ${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$ はすべて m の倍数である。一方で ${}_m C_1 = m$ であるから、これらの最大公約数は m を超えられない。したがって $d_m = m$ である。

(2)

$k = 1$ のときは $1^m - 1 = 0$ なので d_m で割り切れる。

ある自然数 k について $k^m - k$ が d_m で割り切れると仮定する。二項定理より

$$(k+1)^m = k^m + {}_m C_1 k + {}_m C_2 k^2 + \dots + {}_m C_{m-1} k^{m-1} + 1$$

であるから

$$(k+1)^m - (k+1) = k^m - k + {}_m C_1 k + {}_m C_2 k^2 + \dots + {}_m C_{m-1} k^{m-1}$$

である。右辺第 1 項は帰納法の仮定により d_m で割り切れる。また、 d_m の定義により各 ${}_m C_r$ は d_m で割り切れる。したがって右辺全体が d_m で割り切れる。

ゆえに $(k+1)^m - (k+1)$ も d_m で割り切れる。数学的帰納法により、すべての自然数 k に対して $k^m - k$ は d_m で割り切れることが成り立つ。

(3)

m を偶数とする。まず、 d_m が奇素数を約数にもたないことを示す。 p を m を割る奇素数とし、 m を割る p の最大の累乗を p^q とする。すなわち $m = p^q v$ と書き、 v は p で割り切れないとする。 m は偶数で p は奇素数なので、 $p^q < m$ であり、 ${}_m C_{p^q}$ は d_m を考える並びの中に含まれる。

この二項係数を

$${}_m C_{p^q} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p^q+1)}{p^q(p^q-1)(p^q-2)\dots 1}$$

と書き、先頭の $m/p^q = v$ を外すと

$${}_m C_{p^q} = v \cdot \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-p^q+1)}{(p^q-1)(p^q-2)\dots 1}$$

である。

$1 \leq j \leq p^q - 1$ について、 j が p でちょうど e 回割り切れるとする。このとき $e < q$ であり、 $m - j = p^q v - j$ も p でちょうど e 回割り切れる。したがって積 $(m-1)(m-2)\cdots(m-p^q+1)$ に含まれる p の個数は、 $(p^q-1)(p^q-2)\cdots 1$ に含まれる p の個数と等しい。さらに v は p で割り切れない。よって ${}_m C_{p^q}$ は p で割り切れない。したがって d_m は奇素数を約数にもたない。

次に 2 の因数を調べる。 $m = 2^q v$ と書き、 v を奇数とする。 $v > 1$ の場合、 ${}_m C_{2^q}$ を考えると、同様に

$${}_m C_{2^q} = v \cdot \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-2^q+1)}{(2^q-1)(2^q-2)\cdots 1}$$

である。 $1 \leq j \leq 2^q - 1$ について $m - j$ と j に含まれる 2 の個数は等しく、 v は奇数である。したがって ${}_m C_{2^q}$ は奇数である。この場合、 d_m は奇素数も 2 も約数にもたないので $d_m = 1$ である。

残るのは $m = 2^q$ の場合である。このとき m は偶数なので $q \geq 1$ である。 $m = 2$ なら並びは ${}_2 C_1 = 2$ だけなので $d_2 = 2$ である。以下 $m \geq 4$ とする。 ${}_m C_{m/2}$ を考えると

$${}_m C_{m/2} = 2 \cdot \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m/2+1)}{(m/2-1)(m/2-2)\cdots 1}$$

である。ここでも $1 \leq j \leq m/2 - 1$ について $m - j$ と j に含まれる 2 の個数は等しいので、分数部分は奇数である。したがって ${}_m C_{m/2}$ は 2 で割り切れるが 4 では割り切れない。

以上より、 m が偶数のとき d_m は奇素数を約数にもたず、また 4 でも割り切れない。したがって d_m は 1 または 2 である。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 25 分前後で、(3) の素因数評価が山である。(1)(2) は文系第 2 問と共通なので、ここを短時間で確実に処理し、(3) に時間を残したい。奇素数 p を消すには「 d_m がすべての二項係数を割る」ことの逆を使い、 p で割り切れない二項係数を 1 つ作ればよい。2 についても、 m が 2 の累乗でない場合と 2 の累乗の場合を分ける。典型的なミスは、 p^q が m を割る最大の累乗であることを使わず、分子分母の素因数の個数比較を曖昧にすることである。

【第 2 問】

実数を成分にもつ行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と実数 r, s が下の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとする。

(i) $s > 1$

(ii) $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \ (n = 1, 2, \dots)$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

このとき以下の間に答えよ。

(1) $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a, c, r, s を用いて表せ。

(2) $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} \ (n = 1, 2, \dots)$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ を示せ。

(3) $c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ。

【方針】

(1) は条件 (ii) から b と d を a, c, r, s で表し、 $P = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP$ を直接計算する。(2) は $B = P^{-1}AP$ より $B^n = P^{-1}A^nP$ であり、しかも $P(1, 0)^T = (1, 0)^T$ であることを使う。(3) は (1) で得た下三角形の形から $B^n(1, 0)^T$ の成分の漸化式を書く。 $s > 1$ なので、もし $c \neq 0$ なら下成分に s^{n-1} 程度の成長が残り、(2) の極限 0 に反する。

【解答】

(1)

条件 (ii) より

$$A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar + b \\ cr + d \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sr \\ s \end{pmatrix}$$

である。したがって $ar + b = sr$, $cr + d = s$ より $b = r(s - a)$, $d = s - cr$ である。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。まず

$$AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ar + b \\ c & cr + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}$$

である。よって

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - cr & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$$

である。

(2)

$B = P^{-1}AP$ であるから、繰り返し掛けると $B^n = P^{-1}A^nP$ である。また

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1}A^nP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1}A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

条件 (iii) より

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - ry_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

である。 $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$ なので $z_n = x_n - ry_n \rightarrow 0$, $w_n = y_n \rightarrow 0$ である。

(3)

(1) の結果を用い、 $\lambda = a - cr$ とおく。このとき

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$$

である。 $B^n(1, 0)^T = (z_n, w_n)^T$ とし、便宜上 $z_0 = 1, w_0 = 0$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_n \\ cz_n + sw_n \end{pmatrix}$$

である。したがって $z_{n+1} = \lambda z_n$, $w_{n+1} = cz_n + sw_n$ となる。特に $z_n = \lambda^n$ である。

(2) より $z_n \rightarrow 0$ であるから $|\lambda| < 1$ である。

ここで $c \neq 0$ と仮定して矛盾を導く。上の漸化式から

$$w_n = c(\lambda^{n-1} + s\lambda^{n-2} + s^2\lambda^{n-3} + \cdots + s^{n-2}\lambda + s^{n-1})$$

である。両辺を s^{n-1} で割ると

$$\frac{w_n}{s^{n-1}} = c \left\{ 1 + \frac{\lambda}{s} + \left(\frac{\lambda}{s}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{s}\right)^{n-1} \right\}$$

である。 $s > 1$ かつ $|\lambda| < 1$ より $\left|\frac{\lambda}{s}\right| < 1$ なので、右辺は $\frac{c}{1 - \lambda/s}$ に近づく。この値は $c \neq 0$ なら 0 ではない。したがって w_n は s^{n-1} に比例する大きさを持ち、0 に近づくことはできない。これは (2) の $w_n \rightarrow 0$ に反する。

よって $c = 0$ である。このとき $\lambda = a - cr = a$ であり、すでに $|\lambda| < 1$ が分かっているので $c = 0$, $|a| < 1$ である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20 分程度で、誘導通りに行列を変形し、最後は 2 成分の数列として処理する問題である。(1) では条件 (ii) から b, d を消してから掛け算すると計算が軽い。(2) は $P(1, 0)^T = (1, 0)^T$ を見落とさないことが重要で、これにより条件 (iii) の極限をそのまま移せる。(3) では $s > 1$ の成分が残ると下成分が 0 に収束できない、という一点を漸化式で示す。抽象的な行列用語に逃げず、成分計算で最後まで書くのが安全である。

【第 3 問】

スイッチを 1 回押すごとに、赤、青、黄、白のいずれかの色の玉が 1 個、等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

- (A) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を L に入れる。
 - (B) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を R に入れる。
 - (C) 1 回スイッチを押し、出てきた玉と同じ色の玉が、 L になればその玉を L に入れ、 L にあればその玉を R に入れる。
- (1) L と R は空であるとする。操作 (A) を 5 回おこない、さらに操作 (B) を 5 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。
- (2) L と R は空であるとする。操作 (C) を 5 回おこなう。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。
- (3) L と R は空であるとする。操作 (C) を 10 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。 $\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

各操作列は色の列として数える。5 回で 4 色すべてが出る条件は、1 色だけが 2 回、他の 3 色が 1 回ずつ出ることである。(1) は L 側 5 回と R 側 5 回が独立に同じ条件を満たす確率にする。(2) は操作 (C) では各色の初出が L に入るので、 L に 4 色そろふことと 5 回の色列に 4 色すべてが現れることが同値である。(3) は操作 (C) で R にも 4 色そろふ条件を、各色が 10 回中少なくとも 2 回出る条件に読み替え、出現回数の型 $(4, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 2, 2)$ を数える。

【解答】

(1)
5 回の操作で 4 色すべてが出る場合を数える。5 個の玉で 4 色がすべて現れるためには、ある 1 色が 2 回出て、残り 3 色が 1 回ずつ出るしかない。

2 回出る色の選び方は 4 通りである。その色が出る 2 か所を含めて 5 回の並べ方は $\frac{5!}{2!}$ 通りである。したがって、5 回で 4 色すべてが出る色列は $4 \cdot \frac{5!}{2!} = 240$ 通りである。全体の色列は 4^5 通りなので、5 回で 4 色すべてが出る確率は $\frac{240}{4^5} = \frac{15}{64}$ である。

操作 (A) の 5 回で L に 4 色すべてが入り、操作 (B) の 5 回で R に 4 色すべてが入ればよい。2 つの 5 回の色列は独立であるから $P_1 = \left(\frac{15}{64}\right)^2 = \frac{225}{4096}$ である。

(2)
操作 (C) では、ある色が初めて出たときはその玉が L に入る。同じ色がすでに L にある場合だけ R に入る。したがって、5 回の操作後に L に 4 色すべてが入っていることは、5 回の色列に 4 色すべてが現れることと同値である。
よって (1) で数えた確率そのものになり $P_2 = \frac{15}{64}$ である。

(3)
操作 (C) で L にも R にも 4 色すべてが入るには、各色について、少なくとも 1 回目の出現が L に入り、さらに 2 回目以降の出現が R に入る必要がある。したがって 10 回の色列の中で、各色が少なくとも 2 回ずつ出ることが必要十分条件である。10 回を 4 色に分け、各色が少なくとも 2 回出るとき、出現回数の型は $(4, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 2, 2)$ の 2 種類だけである。
型 $(4, 2, 2, 2)$ では、4 回出る色の選び方が 4 通りあり、その後の並べ方は $\frac{10!}{4!2!2!2!}$ 通りである。したがって $4 \cdot \frac{10!}{4!2!2!2!} = 75600$ 通りである。

型 $(3, 3, 2, 2)$ では、3 回出る 2 色の選び方が ${}_4C_2$ 通りあり、並べ方は $\frac{10!}{3!3!2!2!}$ 通りである。したがって ${}_4C_2 \cdot \frac{10!}{3!3!2!2!} = 151200$ 通りである。

よって $P_3 = \frac{75600 + 151200}{4^{10}} = \frac{226800}{4^{10}}$ である。一方 $P_1 = \left(\frac{240}{4^5}\right)^2 = \frac{240^2}{4^{10}}$ であるから

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{226800}{240^2} = \frac{226800}{57600} = \frac{63}{16}$$

である。

▶ 解法 2 (包除原理)

【方針】

(1)(2) は 5 回の色列で 4 色すべてが現れる本数を包除原理で数える。(3) は「各色が 2 回以上」を、各色の出現回数が 0 回または 1 回である事象の補集合として数える。重なりでは、指定した 2 色または 3 色がそれぞれ高々 1 回現れる列を、出現位置を選んで数える。

【解答】

(1) 5 回の色列のうち 4 色すべてが現れる本数を N_5 とする。少なくとも 1 色が現れない列を包除原理で除くと

$$\begin{aligned} N_5 &= 4^5 - {}_4C_1 3^5 + {}_4C_2 2^5 - {}_4C_3 1^5 \\ &= 1024 - 972 + 192 - 4 \\ &= 240. \end{aligned}$$

したがって、5 回で 4 色がそろえる確率は

$$\frac{N_5}{4^5} = \frac{240}{1024} = \frac{15}{64}.$$

操作 (A) の 5 回と操作 (B) の 5 回は独立だから

$$P_1 = \left(\frac{15}{64}\right)^2 = \frac{225}{4096}.$$

(2) 操作 (C) では各色の最初の 1 個が必ず L に入る。したがって、5 回後に L に 4 色がそろえることは、5 回の色列に 4 色すべてが現れることと同値である。よって

$$P_2 = \frac{N_5}{4^5} = \frac{15}{64}.$$

(3) 操作 (C) の 10 回後に L, R の双方へ 4 色がそろえるための必要十分条件は、各色が 2 回以上現れることである。

色 i の出現回数が 0 回または 1 回である事象を A_i とする。まず、1 色を指定したとき

$$|A_i| = 3^{10} + {}_{10}C_1 3^9 = 3^{10} + 10 \cdot 3^9.$$

2 色を指定し、その双方が高々 1 回現れる列は

$$2^{10} + 2 \cdot 10 \cdot 2^9 + 10 \cdot 9 \cdot 2^8$$

本である。ここで 3 項は順に、指定 2 色の出現回数が $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ または $(0, 1)$ 、 $(1, 1)$ の場合に対応する。

3 色を指定し、それぞれが高々 1 回現れる列は

$$1 + 3 \cdot 10 + {}_3C_2 10 \cdot 9 + 10 \cdot 9 \cdot 8 = 1021$$

本である。10 個の位置に 4 色を各 1 回以下しか置かないことは不可能なので、4 事象の共通部分は空である。

したがって、再び包除原理により条件を満たす列の本数 N_{10} は

$$\begin{aligned} N_{10} &= 4^{10} - 4(3^{10} + 10 \cdot 3^9) \\ &\quad + 6(2^{10} + 20 \cdot 2^9 + 90 \cdot 2^8) - 4 \cdot 1021 \\ &= 226800. \end{aligned}$$

よって

$$P_3 = \frac{226800}{4^{10}}.$$

一方、(1) から $P_1 = 240^2/4^{10}$ であるから

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{226800}{240^2} = \frac{63}{16}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 18 分程度で、操作を色列の出現回数へ翻訳することが核心である。(1)(2) の 5 回では出現回数型 (2, 1, 1, 1) を直接数えても、包除原理で欠ける色を除いてもよい。(3) では操作 (C) の規則から、両箱に全色があることが「各色 2 回以上」と同値になる。直接法では (4, 2, 2, 2)、(3, 3, 2, 2) の 2 型、別解では 0 回・1 回の色を包除する。典型的な誤りは L, R の条件を独立とみなすことと、求める量が P_3 ではなく P_3/P_1 であることを忘れることである。

【第 4 問】

a を正の実数とし、空間内の 2 つの円板

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = a\},$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = -a\}$$

を考える。 D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分 x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。 E の体積を $V(a)$ とし、 E と $\{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

(2) $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

y を固定し、 xz 平面で円板の断面がどのような領域を掃くかを見る。 $\rho = \sqrt{1 - y^2}$ とすると、断面は $z = a$ 上の線分 $-\rho \leq x \leq \rho$ である。線分上の点は原点からの距離 $\sqrt{a^2 + u^2}$ を保ったまま半回転するので、半径ごとの角度幅で断面積を求める。 $x \geq 0$ 側では各半径について角度幅がちょうど π となり、半円環の面積になる。全体の体積は余分な角度 $2 \arctan(u/a)$ を評価し、 $a \rightarrow \infty$ でその寄与が消えることを示す。

【解答】

(1)

y を固定して考える。 $|y| \leq 1$ のとき $\rho = \sqrt{1 - y^2}$ とおくと、円板 D_1 の y を固定した断面は、 xz 平面で $-\rho \leq x \leq \rho$, $z = a$ を満たす線分である。 $|y| > 1$ では断面は空である。

線分上の点を (u, a) とする。ただし $-\rho \leq u \leq \rho$ である。この点は y 軸のまわりの回転により、 xz 平面では原点を中心とする円弧を描き、原点からの距離 $\sqrt{a^2 + u^2}$ は変わらない。 u と $-u$ は同じ半径を与えるので、半径を a から $\sqrt{a^2 + \rho^2}$ まで動かして考えればよい。

半径が $r = \sqrt{a^2 + u^2}$ である部分について、 $x \geq 0$ 側に現れる角度幅はちょうど π である。したがって、固定した y における $E \cap \{x \geq 0\}$ の断面積は、半径 a から $\sqrt{a^2 + \rho^2}$ までの半円環の面積で

$$\frac{\pi}{2} \{(a^2 + \rho^2) - a^2\} = \frac{\pi}{2} \rho^2 = \frac{\pi}{2} (1 - y^2)$$

である。

これを $-1 \leq y \leq 1$ で積分して

$$\begin{aligned} W(a) &= \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2} (1 - y^2) dy \\ &= \frac{\pi}{2} \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

同じく y を固定する。 $0 \leq u \leq \rho$ とし、点 (u, a) が正の z 軸となす角を β とおくと $\tan \beta = \frac{u}{a}$, $\beta = \arctan \frac{u}{a}$ である。半径 $\sqrt{a^2 + u^2}$ の円周上で、 u と $-u$ から出る半回転の弧を合わせると、角度幅は $\pi + 2\beta$ になる。したがって、固定した y

における E 全体の断面積を $A_y(a)$ とすると、半径方向の幅を用いて

$$A_y(a) = \int_0^\rho \left(\pi + 2 \arctan \frac{u}{a} \right) u \, du$$

と表せる。ここで $u \, du$ は、半径 $r = \sqrt{a^2 + u^2}$ に対して $r \, dr = u \, du$ となることから出ている。

(1) の断面積は

$$\int_0^\rho \pi u \, du = \frac{\pi}{2} \rho^2$$

であった。したがって余分な面積は

$$A_y(a) - \frac{\pi}{2} \rho^2 = 2 \int_0^\rho u \arctan \frac{u}{a} \, du$$

である。 $u \geq 0, a > 0$ に対して $0 \leq \arctan \frac{u}{a} \leq \frac{u}{a}$ だから

$$0 \leq A_y(a) - \frac{\pi}{2} \rho^2 \leq 2 \int_0^\rho u \cdot \frac{u}{a} \, du = \frac{2}{3a} \rho^3$$

である。 $\rho = \sqrt{1 - y^2} \leq 1$ なので $0 \leq A_y(a) - \frac{\pi}{2} (1 - y^2) \leq \frac{2}{3a}$ である。

これを $-1 \leq y \leq 1$ で積分すると

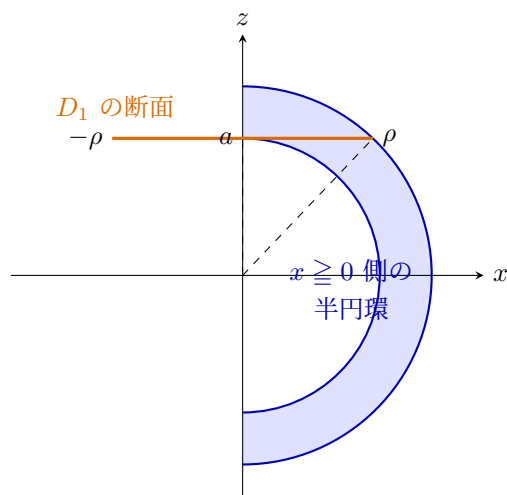
$$0 \leq V(a) - \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2} (1 - y^2) \, dy \leq \frac{4}{3a}$$

となる。右端は $a \rightarrow \infty$ で 0 に近づく。よって

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2} (1 - y^2) \, dy = \frac{2\pi}{3}$$

である。

【 y を固定した xz 断面】



$\rho = \sqrt{1 - y^2}$ 。半径は a から $\sqrt{a^2 + \rho^2}$ まで動く。

▶ 解法 2 (断面積の厳密式)

【方針】

y を固定し、 $\rho = \sqrt{1-y^2}$ とする。半径 $\sqrt{a^2+u^2}$ の円周上で掃かれる角度 $\pi + 2 \arctan(u/a)$ を用いて断面積を厳密に積分する。余分な断面積の式を得た後、一様な上界で極限を処理する。

【解答】

(1) $-1 \leq y \leq 1$ を固定し、

$$\rho = \sqrt{1-y^2}$$

とおく。 D_1 の断面上の点 (u, a) と $(-u, a)$ ($0 \leq u \leq \rho$) は、同じ半径

$$r = \sqrt{a^2+u^2}$$

の円周上を半回転する。 $x \geq 0$ 側では、2 本の円弧の和集合がちょうど角度 π を覆う。したがって断面積は

$$\int_a^{\sqrt{a^2+\rho^2}} \pi r \, dr = \frac{\pi}{2} \rho^2.$$

よって

$$\begin{aligned} W(a) &= \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2} (1-y^2) \, dy \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

(2) (u, a) が正の z 軸となす角を

$$\beta = \arctan \frac{u}{a}$$

とする。点 (u, a) と $(-u, a)$ から始まる半回転の円弧を合わせると、半径 $r = \sqrt{a^2+u^2}$ 上で覆う角度は

$$\pi + 2\beta$$

である。 $r \, dr = u \, du$ だから、固定した y での断面積 $A_y(a)$ は

$$A_y(a) = \int_0^\rho \left(\pi + 2 \arctan \frac{u}{a} \right) u \, du.$$

ここで

$$\int u \arctan \frac{u}{a} \, du = \frac{a^2+u^2}{2} \arctan \frac{u}{a} - \frac{au}{2}$$

であるから

$$A_y(a) = \frac{\pi}{2} \rho^2 + (a^2 + \rho^2) \arctan \frac{\rho}{a} - a\rho.$$

極限を厳密に処理するため、積分表示へ戻る。 $0 \leq \arctan(u/a) \leq u/a$ より

$$\begin{aligned} 0 &\leq A_y(a) - \frac{\pi}{2} \rho^2 \\ &= 2 \int_0^\rho u \arctan \frac{u}{a} \, du \\ &\leq \frac{2}{a} \int_0^\rho u^2 \, du = \frac{2\rho^3}{3a} \leq \frac{2}{3a}. \end{aligned}$$

これを $-1 \leq y \leq 1$ で積分すると

$$0 \leq V(a) - \frac{2\pi}{3} \leq \frac{4}{3a}.$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = \frac{2\pi}{3}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安時間は 25 分前後で、回転する円板を直接立体として追わず、 y を固定した xz 断面へ落とすのが核心である。 $\rho = \sqrt{1-y^2}$ とすると、 $x \geq 0$ 側は半径 a から $\sqrt{a^2+\rho^2}$ までの半円環になる。(2) では全断面の角度幅が $\pi + 2 \arctan(u/a)$ であり、半円環からの超過分を $\arctan(u/a) \leq u/a$ で一様に押さえる。別解では断面積の厳密式も計算し、極限值だけでなく有限の a で何が余るかを明示した。

【第 5 問】

(1) 実数 x が $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ をみたすとき、次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$

▶ 解法 1

【方針】

(1) は両辺が正なので対数を取り、 $x > 0$ と $x < 0$ を分ける。対数を含む補助関数の導関数を積分表示で評価する。(2) は (1) へ $x = 1/100$ と $x = -1/100$ を代入する。積 $0.99 \cdot 1.01 = 0.9999$ が現れ、左右の不等式がそのまま得られる。

【解答】

(1) 両辺は正なので対数を取って比較できる。

まず $0 < x < 1$ とする。示すべき不等式は

$$\log(1+x) + (1-x)\log(1-x) > 0$$

と同値である。そこで

$$F(x) = \log(1+x) + (1-x)\log(1-x)$$

とおく。 $F(0) = 0$ であり、

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1+x} - \log(1-x) - 1 \\ &= -\frac{x}{1+x} - \log(1-x). \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ では

$$-\log(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-u} du > x > \frac{x}{1+x}$$

だから $F'(x) > 0$ である。よって $F(x) > F(0) = 0$ となる。

次に $-1 < x < 0$ とし、 $y = -x$ とおく。このとき $0 < y < 1$ であり、示すべき不等式は

$$\log(1-y) + (1+y)\log(1+y) < 0$$

と同値である。そこで

$$G(y) = \log(1-y) + (1+y)\log(1+y)$$

とおく。 $G(0) = 0$ であり、

$$\begin{aligned} G'(y) &= -\frac{1}{1-y} + \log(1+y) + 1 \\ &= \log(1+y) - \frac{y}{1-y}. \end{aligned}$$

$0 < y < 1$ では

$$\log(1+y) = \int_0^y \frac{1}{1+u} du < y < \frac{y}{1-y}$$

だから $G'(y) < 0$ である。よって $G(y) < G(0) = 0$ となる。

以上から、 $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ で

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

が成り立つ。

(2) (1) へ $x = 1/100$ を代入すると

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{-99} < \left(\frac{101}{100}\right)^{100}.$$

両辺へ $(99/100)^{100}$ を掛けて

$$\frac{99}{100} < \left(\frac{99}{100} \cdot \frac{101}{100} \right)^{100} = 0.9999^{100}.$$

したがって

$$0.99 < 0.9999^{100}.$$

次に (1) へ $x = -1/100$ を代入すると

$$\left(\frac{101}{100} \right)^{101} < \left(\frac{99}{100} \right)^{-100}.$$

両辺へ $(99/100)^{101}$ を掛けて

$$\left(\frac{99}{100} \cdot \frac{101}{100} \right)^{101} < \frac{99}{100}.$$

したがって

$$0.9999^{101} < 0.99.$$

以上より

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}.$$

▶ 解法 2 (単一の補助関数と二項評価)

【方針】

(1) は対数差を $F(x)/x$ とまとめ、 F'' の符号から F が全区間で狭義増加することを示す。(2) は (1) に頼らず、右側をベルヌーイ型評価、左側を二項展開の交代項で挟む。

【解答】

(1) 対数を取った右辺と左辺の差は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} \log(1+x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \log(1-x) \\ &= \frac{\log(1+x) + (1-x) \log(1-x)}{x}. \end{aligned}$$

そこで

$$F(x) = \log(1+x) + (1-x) \log(1-x)$$

とおく。 $F(0) = 0$ であり、

$$F'(x) = -\frac{x}{1+x} - \log(1-x),$$

$$F''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{x(x+3)}{(1-x)(1+x)^2}.$$

したがって $F''(x) < 0$ ($-1 < x < 0$)、 $F''(x) > 0$ ($0 < x < 1$) であり、 $F'(0) = 0$ だから

$$F'(x) > 0 \quad (-1 < x < 1, x \neq 0).$$

よって F は狭義増加し、

$$x < 0 \Rightarrow F(x) < 0, \quad x > 0 \Rightarrow F(x) > 0.$$

いずれの場合も $F(x)/x > 0$ である。したがって対数を取った右辺が左辺より大きく、

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

が示された。

(2) $y = 10^{-4}$ とおく。まず

$$H(y) = (1-y)^{100} - (1-100y)$$

とおけば $H(0) = 0$ で、

$$H'(y) = 100\{1 - (1-y)^{99}\} > 0 \quad (0 < y < 1).$$

したがって

$$0.9999^{100} = (1 - y)^{100} > 1 - 100y = 0.99.$$

一方、二項展開により

$$(1 - y)^{101} = 1 - 101y + {}_{101}C_2 y^2 - {}_{101}C_3 y^3 + \cdots - y^{101}.$$

第 j 項と第 $j + 1$ 項の絶対値の比は

$$\frac{{}_{101}C_{j+1} y^{j+1}}{{}_{101}C_j y^j} = \frac{101 - j}{j + 1} y \leq 50 \cdot 10^{-4} < 1 \quad (j \geq 1).$$

したがって第 3 次項以降は、負から始まり絶対値が減少する交代和である。よって

$$\begin{aligned} (1 - y)^{101} &< 1 - 101y + {}_{101}C_2 y^2 \\ &= 1 - \frac{101}{10000} + \frac{5050}{10^8} \\ &= 0.9899505 \\ &< 0.99. \end{aligned}$$

以上より

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}.$$

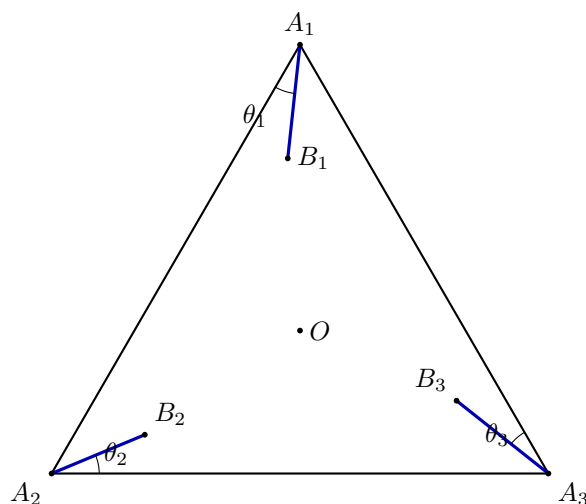
【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 20 分程度で、(1) では正の両辺へ対数を取り、 x の符号を安全に処理する。符号別の補助関数でも、対数差を $F(x)/x$ とまとめる方法でも証明できる。(2) の出題意図は (1) に $x = \pm 1/100$ を代入し、 $0.99 \cdot 1.01 = 0.9999$ を作ることである。この誘導解法を主解とし、近似に頼らない独立確認としてベルヌーイ型評価と二項展開も収録した。小数の丸めだけで大小を主張してはならない。

【第 6 問】

平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(P, Q)$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle A_1 A_2 A_3$ がある。 $\triangle A_1 A_2 A_3$ の内部に 3 点 B_1, B_2, B_3 を、 $d(A_n, B_n) = 1$ ($n = 1, 2, 3$) となるようにとる。また、

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \overrightarrow{A_1 A_2}, \quad \vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2 A_3}, \quad \vec{a}_3 = \overrightarrow{A_3 A_1} \\ \vec{e}_1 &= \overrightarrow{A_1 B_1}, \quad \vec{e}_2 = \overrightarrow{A_2 B_2}, \quad \vec{e}_3 = \overrightarrow{A_3 B_3} \end{aligned}$$

とおく。 $n = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して、時刻 0 に A_n を出発し、 $\vec{e}_n$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え、時刻 t におけるその位置を $P_n(t)$ と表すことにする。



配置の模式図。 $B_n = P_n(1)$ であり、長さの比は実寸ではない。

- (1) ある時刻 t で $d(P_1(t), P_2(t)) \leq 1$ が成立した。ベクトル $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ と、ベクトル $\vec{a}_1$ とのなす角度を θ とおく。このとき $|\sin \theta| \leq \frac{1}{1000}$ となることを示せ。
- (2) 角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を $\theta_1 = \angle B_1 A_1 A_2, \theta_2 = \angle B_2 A_2 A_3, \theta_3 = \angle B_3 A_3 A_1$ によって定義する。 α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ か

つ $\sin \alpha = \frac{1}{1000}$ をみたす実数とする。(1) と同じ仮定のもとで、 $\theta_1 + \theta_2$ の値のとりうる範囲を α を用いて表せ。
 (3) 時刻 t_1, t_2, t_3 のそれぞれにおいて、次が成立した。

$$d(P_2(t_1), P_3(t_1)) \leq 1, \quad d(P_3(t_2), P_1(t_2)) \leq 1, \quad d(P_1(t_3), P_2(t_3)) \leq 1$$

このとき、時刻 $T = \frac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(P_1(T), O) \leq 3, \quad d(P_2(T), O) \leq 3, \quad d(P_3(T), O) \leq 3$$

が成立することを示せ。

【方針】

(1) は $\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)} = \overrightarrow{a_1} - t(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2})$ と書き、長さ 1000 のベクトル $\overrightarrow{a_1}$ から、 $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ 方向の直線までの距離が 1 以下であると読む。(2) は単位ベクトルの差の向きを三角関数で計算し、 $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ と $\overrightarrow{a_1}$ のなす角が $(\theta_1 + \theta_2)/2 - \pi/6$ になることを使う。(3) は 3 組すべてに (2) を適用し、各 θ_i が中心方向の角 $\pi/6$ から高々 3α しかずれないことを導き、時刻 T で頂点から中心へ進む長さと同じだけ進んだ点を弦の長さで評価する。

【解答】

(1)

時刻 t において

$$\overrightarrow{A_1P_1(t)} = t\overrightarrow{e_1}, \quad \overrightarrow{A_2P_2(t)} = t\overrightarrow{e_2}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1(t)P_2(t)} &= \overrightarrow{P_1(t)A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2P_2(t)} \\ &= -t\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{a_1} + t\overrightarrow{e_2} \\ &= \overrightarrow{a_1} - t(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}) \end{aligned}$$

である。

ある時刻 t で $d(P_1(t), P_2(t)) \leq 1$ が成り立つなら、ベクトル $\overrightarrow{a_1}$ の先端は、 $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ の方向に引いた直線から距離 1 以下のところにある。したがって、 $\overrightarrow{a_1}$ からその直線までの垂直距離は 1 以下である。

$|\overrightarrow{a_1}| = 1000$ であり、 $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ と $\overrightarrow{a_1}$ のなす角を θ とすると、この垂直距離は $1000|\sin \theta|$ である。よって $1000|\sin \theta| \leq 1$ となり、 $|\sin \theta| \leq \frac{1}{1000}$ が示された。

(2)

$\overrightarrow{a_1}$ の向きを角度 0 の方向として測る。 B_1, B_2 はいずれも正三角形の内部にあるので $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$, $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{3}$ である。 $\overrightarrow{e_1}$ の方向角は θ_1 であり、 $\overrightarrow{a_2}$ の方向は $\overrightarrow{a_1}$ から $2\pi/3$ だけ回転した向きなので、 $\overrightarrow{e_2}$ の方向角は $\frac{2\pi}{3} + \theta_2$ である。

一般に、方向角が u, v である 2 つの単位ベクトルの差を考えると

$$(\cos u, \sin u) - (\cos v, \sin v) = 2 \sin \frac{v-u}{2} \left(\sin \frac{u+v}{2}, -\cos \frac{u+v}{2} \right)$$

である。ここでは $v-u$ は 0 と π の間にあるので、差のベクトルの方向角は $\frac{u+v}{2} - \frac{\pi}{2}$ である。 $u = \theta_1, v = 2\pi/3 + \theta_2$ を代入すると、 $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ の方向角は $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\pi}{6}$ である。

(1) より、この有向角を ϕ とおけば $|\sin \phi| \leq \frac{1}{1000} = \sin \alpha$ である。また $\sin \alpha = 1/1000 < 1/2 = \sin(\pi/6)$ かつ $0 < \alpha < \pi/2$ だから $0 < \alpha < \pi/6$ である。さらに $-\pi/6 < \phi < \pi/6$ なので、 $|\sin \phi| \leq \sin \alpha$ から $|\phi| \leq \alpha$ を得る。したがって $-\alpha \leq \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \alpha$ となる。両辺を 2 倍して

$$\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_1 + \theta_2 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha$$

である。

(3)

与えられた 3 つの接近条件に (2) をそれぞれ適用する。組 (P_1, P_2) から $\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_1 + \theta_2 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha$ を得る。同様に、組 (P_2, P_3) , 組 (P_3, P_1) から $\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_2 + \theta_3 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha$ および $\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_3 + \theta_1 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha$ を得る。

ここで

$$\delta_i = \theta_i - \frac{\pi}{6} \quad (i = 1, 2, 3)$$

とおく。上の 3 組の評価は

$$|\delta_1 + \delta_2| \leq 2\alpha, \quad |\delta_2 + \delta_3| \leq 2\alpha, \quad |\delta_3 + \delta_1| \leq 2\alpha$$

と書ける。恒等式

$$2\delta_1 = (\delta_1 + \delta_2) + (\delta_1 + \delta_3) - (\delta_2 + \delta_3)$$

と三角不等式から

$$2|\delta_1| \leq 6\alpha, \quad |\delta_1| \leq 3\alpha.$$

添字を巡回させれば

$$\left| \theta_i - \frac{\pi}{6} \right| = |\delta_i| \leq 3\alpha \quad (i = 1, 2, 3)$$

を得る。

正三角形の中心 O は、各頂点の角の二等分線上にある。したがって、 A_i から O へ向かう方向は、辺の方向から角度 $\pi/6$ だけ内側へ傾いた向きである。また一辺が 1000 の正三角形の外接円半径は $A_iO = \frac{1000}{\sqrt{3}} = T$ である。

時刻 T において、 $P_i(T)$ は A_i から $\vec{e}_i$ の向きに長さ T だけ進んだ点である。一方、 O は A_i から中心方向に長さ T だけ進んだ点である。これら 2 つの方向のなす角は高々 3α なので、二等辺三角形の弦の長さより

$$d(P_i(T), O) \leq 2T \sin \frac{3\alpha}{2}$$

である。

ここで $\sin \alpha = 1/1000 < 1/2 = \sin(\pi/6)$ であり、 $0 < \alpha < \pi/2$ だから $0 < \alpha < \pi/6$ である。したがって $0 < 3\alpha/2 < \pi/4 < \pi/2$ である。正弦関数は $[0, \pi]$ で凹であり $\sin 0 = 0$ だから、 $0 < u < v < \pi$ なら

$$\frac{\sin u}{u} > \frac{\sin v}{v}.$$

$u = \alpha$ 、 $v = 3\alpha/2$ とすれば

$$\sin \frac{3\alpha}{2} < \frac{3}{2} \sin \alpha = \frac{3}{2000}.$$

よって

$$d(P_i(T), O) < 2 \cdot \frac{1000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2000} = \sqrt{3} < 3$$

となる。これは $i = 1, 2, 3$ のすべてで成り立つので

$$d(P_1(T), O) \leq 3, \quad d(P_2(T), O) \leq 3, \quad d(P_3(T), O) \leq 3$$

が同時に成り立つ。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 7。目安時間は 35 分以上で、「ある時刻に 2 点が近づく」という動的条件を、辺ベクトルから進行方向差の直線までの距離へ翻訳する総合問題である。(2) の核心は、2 本の単位ベクトルの差の向きが $(\theta_1 + \theta_2)/2 - \pi/6$ になることである。(3) では 3 組の和の評価から各 θ_i が中心方向の角 $\pi/6$ に近いことを導き、同じ長さ $T = 1000/\sqrt{3}$ をもつ 2 本の線分の端点距離として評価する。付属図は配置把握用の模式図として TikZ で再構成した。最後の正弦評価は $\sin u/u$ の単調性を用い、数値近似に頼らず 3 未満まで示している。