

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 2010 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

- (1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。
- (2) $a + b + c = 1$ のとき， V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

第 2 問

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

(2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

第 3 問

2つの箱 L と R , ボール 30 個, コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。 x を 0 以上 30 以下の整数とする。 L に x 個, R に $30 - x$ 個のボールを入れ, 次の操作 (＃) を繰り返す。

(＃) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ, 表が出れば箱 R から箱 L に, 裏が出れば箱 L から箱 R に, $K(z)$ 個のボールを移す。ただし, $0 \leq z \leq 15$ のとき $K(z) = z$, $16 \leq z \leq 30$ のとき $K(z) = 30 - z$ とする。

m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15) = P_2(15) = \frac{1}{2}$ となる。以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

- (1) $m \geq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び, $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。
- (2) n を自然数とすると, $P_{2n}(10)$ を求めよ。
- (3) n を自然数とすると, $P_{4n}(6)$ を求めよ。

第 4 問

O を原点とする座標平面上の曲線

$$C : y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

と、その上の相異なる 2 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を考える。

- (1) P_i ($i = 1, 2$) を通る x 軸に平行な直線と、直線 $y = x$ との交点を、それぞれ H_i ($i = 1, 2$) とする。このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ。
- (2) $x_1 < x_2$ とする。このとき C の $x_1 \leq x \leq x_2$ の範囲にある部分と、線分 P_1O , P_2O とで囲まれる図形の面積を、 y_1 , y_2 を用いて表せ。

第 5 問

C を半径 1 の円周とし、 A を C 上の 1 点とする。3 点 P , Q , R が A を時刻 $t = 0$ に出発し、 C 上を各々一定の速さで、 P , Q は反時計回りに、 R は時計回りに、時刻 $t = 2\pi$ まで動く。 P , Q , R の速さは、それぞれ m , 1, 2 であるとする。したがって、 Q は C をちょうど一周する。ただし、 m は $1 \leq m \leq 10$ をみたす整数である。 $\triangle PQR$ が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

第 6 問

四面体 $OABC$ において、4 つの面はすべて合同であり、 $OA = 3$, $OB = \sqrt{7}$, $AB = 2$ であるとする。また、3 点 O , A , B を含む平面を L とする。

- (1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。 $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。
- (2) $0 < t < 1$ をみたす実数 t に対して、線分 OA , OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t , Q_t とおく。2 点 P_t , Q_t を通り、平面 L に垂直な平面を M とするとき、平面 M による四面体 $OABC$ の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $S(t)$ の最大値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)