

東京大学 2011 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面において、点 $P(0,1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。 a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし、直線 $y = a(x+1)$ と C との交点を Q, R とする。

(1) $\triangle PQR$ の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき、 $S(a)$ が最大となる a を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

直線と円の交点を直接求めるより、円の中心 P から直線 QR までの距離を使う。 QR は半径 1 の円の弦であり、中心から弦までの距離を d とすると、弦長は $2\sqrt{1-d^2}$ 、三角形の高さは d である。これで $S(a)$ を出す。最大化では $S(a) > 0$ なので $S(a)^2$ を最大化してよく、根号を消した有理式を微分する。臨界点のうち $0 < a < 1$ に入るものを選び、増減または端での極限から最大点を確認する。

【解答】

(1) 直線 $y = a(x+1)$ は $ax - y + a = 0$ と書ける。円 C の中心は $P(0,1)$ で半径は 1 である。点 P からこの直線までの距離を d とすると $d = \frac{|a \cdot 0 - 1 + a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}$ である。ここで $0 < a < 1$ より $1-a > 0$ を用いた。

直線と円の交点 Q, R を結ぶ線分は円の弦である。半径 1 の円で、中心から弦までの距離が d であるから、弦の半分の長さは $\sqrt{1-d^2}$ である。したがって $QR = 2\sqrt{1-d^2}$ である。ここで

$$1 - d^2 = 1 - \frac{(1-a)^2}{1+a^2} = \frac{1+a^2 - (1-2a+a^2)}{1+a^2} = \frac{2a}{1+a^2}$$

であるから $QR = 2\sqrt{\frac{2a}{1+a^2}}$ となる。 $\triangle PQR$ の底辺を QR とみると、高さは中心 P から直線 QR までの距離 d である。よって

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{2a}{1+a^2}} \cdot \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}$$

である。したがって $S(a) = \frac{(1-a)\sqrt{2a}}{1+a^2}$ である。

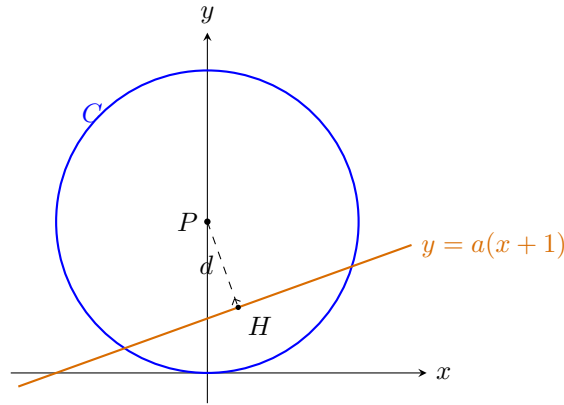
(2) $0 < a < 1$ では $S(a) > 0$ なので、 $S(a)$ を最大にする a は $S(a)^2$ を最大にする a と同じである。 $S(a)^2 = \frac{2a(1-a)^2}{(1+a^2)^2}$

とおく。これを微分すると $\frac{d}{da} S(a)^2 = \frac{-2(a-1)(a+1)(a^2-4a+1)}{(1+a^2)^3}$ である。 $0 < a < 1$ では分母は正、また $a+1 > 0$ 、 $a-1 < 0$ である。したがって符号は $a^2 - 4a + 1$ の符号で決まる。

方程式 $a^2 - 4a + 1 = 0$ の解は $a = 2 \pm \sqrt{3}$ である。このうち $0 < a < 1$ に入るのは $a = 2 - \sqrt{3}$ だけである。また $a^2 - 4a + 1$ は $0 < a < 2 - \sqrt{3}$ で正、 $2 - \sqrt{3} < a < 1$ で負であるから、 $S(a)^2$ は前半で増加し後半で減少する。

したがって $S(a)$ が最大となるのは $a = 2 - \sqrt{3}$ である。

円の中心 P から弦 QR へ下ろした垂線の長さが高さ d であり、弦の半分と半径で直角三角形ができる。



▶ 解法 2 (交点の 2 次方程式から弦長を出す)

【方針】

直線を円の式へ代入し、交点 Q, R の x 座標を 2 次方程式の 2 解として扱う。解の差から弦長を求め、中心から直線までの距離を高さとして面積を出す。最大化では $\log S(a)$ を微分し、積の形の微分を短く処理する。

【解答】

(1) 円 C の方程式は

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

である。直線 $y = a(x + 1)$ を代入すると、交点の x 座標は

$$(1 + a^2)x^2 + 2a(a - 1)x + a^2 - 2a = 0$$

の 2 解となる。この 2 解を $q < r$ とする。判別式を整理すると

$$D = 8a$$

だから

$$r - q = \frac{\sqrt{D}}{1 + a^2} = \frac{2\sqrt{2a}}{1 + a^2}.$$

直線の方角ベクトルは $(1, a)$ なので

$$QR = \sqrt{1 + a^2} (r - q) = \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

また、中心 $P(0, 1)$ から直線 $ax - y + a = 0$ までの距離は

$$d = \frac{1 - a}{\sqrt{1 + a^2}}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} QR \cdot d \\ &= \frac{(1 - a)\sqrt{2a}}{1 + a^2}. \end{aligned}$$

(2) $0 < a < 1$ では $S(a) > 0$ なので、 $\log S(a)$ を微分してよい。

$$\log S(a) = \log(1 - a) + \frac{1}{2} \log(2a) - \log(1 + a^2)$$

より

$$\frac{S'(a)}{S(a)} = -\frac{1}{1 - a} + \frac{1}{2a} - \frac{2a}{1 + a^2} = \frac{a^2 - 4a + 1}{2a(1 - a)(1 + a^2)}.$$

分母は正であり、分子の零点は $2 \pm \sqrt{3}$ である。このうち区間 $0 < a < 1$ に入るのは

$$a = 2 - \sqrt{3}$$

だけである。分子はその前で正、その後で負なので、 $S(a)$ はそこで最大となる。

【総評】 円の弦の長さを中心から直線までの距離で処理する標準問題である。目安時間は 16 分。交点座標を求めても解けるが、弦長 $2\sqrt{1-d^2}$ を使う方が計算が短い。 $0 < a < 1$ なので距離の絶対値が $1-a$ になること、面積の高さが中心から弦への距離になることを明記したい。最大化では $S(a)^2$ を微分して根号を避けるのが実戦的で、候補 $2 \pm \sqrt{3}$ のうち範囲に入るものだけを残す必要がある。

【第 2 問】

実数 x の小数部分を、 $0 \leq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし、これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して、無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように順次定める。

(i) $a_1 = \langle a \rangle$

(ii)
$$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle, \\ a_n = 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = 0. \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3) a が有理数であるとする。 a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \frac{p}{q}$ と表すとき、 q 以上のすべての自然数 n に対して、 $a_n = 0$ であることを示せ。

【方針】

(1)(2) は小数部分の固定点問題として処理する。(1) では $\sqrt{2}-1$ が写像 $x \mapsto \langle 1/x \rangle$ の固定点であることを確認する。(2) では $a = \langle a \rangle$ から $1/3 \leq a < 1$ を得て、 $\langle 1/a \rangle = a$ を $1/a - a$ が整数である条件に直す。(3) は有理数の分母が減ることを示す。 $a_n \neq 0$ のとき既約分数 $a_n = r/s$ と表し、 $s = kr + \rho$ と割り算すると、次項は 0 または ρ/r の小数部分になり、0 でない限り既約分母は s より小さくなる。初項の分母は高々 q なので、 q 番目以降は 0 になる。

【解答】

(1) $1 < \sqrt{2} < 2$ であるから $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$ である。また $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$ であり、 $2 < \sqrt{2} + 1 < 3$ なので

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2} + 1 \rangle = \sqrt{2} - 1$$

である。よって $a_2 = a_1$ であり、同じことが繰り返される。したがって $a_n = \sqrt{2} - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である。

(2) 任意の自然数 n について $a_n = a$ であるとする。特に $a_1 = \langle a \rangle = a$ だから、 a は小数部分として現れる値であり $0 \leq a < 1$ である。問題の条件 $a \geq 1/3$ と合わせて $\frac{1}{3} \leq a < 1$ を得る。したがって $a \neq 0$ である。

さらに $a_2 = a$ であるから $\langle \frac{1}{a} \rangle = a$ である。小数部分の定義より、ある整数 m が存在して $\frac{1}{a} = m + a$ と表せる。つまり $\frac{1}{a} - a = m$ である。 $1/3 \leq a < 1$ より $0 < \frac{1}{a} - a < 3$ なので、整数 m は $m = 1, 2$ のいずれかである。 $m = 1$ のとき $a^2 + a - 1 = 0$ より、正の解として $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ を得る。 $m = 2$ のとき $a^2 + 2a - 1 = 0$ より、正の解として $a = \sqrt{2} - 1$ を得る。どちらも $1/3 \leq a < 1$ を満たし、 $\langle 1/a \rangle = a$ も満たす。

したがって求める値は $\sqrt{2} - 1$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ である。

(3) $a = p/q$ と表されているとする。 $a_1 = \langle p/q \rangle$ は有理数であり、 $a_1 \neq 0$ のとき既約分数で表した分母は高々 q である。もし $a_1 = 0$ なら、定義より以後もすべて 0 なので結論は明らかである。

以下、 $a_n \neq 0$ とし、 a_n を既約分数で $a_n = \frac{r}{s}$ ($0 < r < s$) と表す。ただし、 r と s は互いに素とする。小数部分なので $0 < a_n < 1$ であり、したがって $0 < r < s$ である。 s を r で割って $s = kr + \rho$, $0 \leq \rho < r$ とおく。すると $\frac{1}{a_n} = \frac{s}{r} = k + \frac{\rho}{r}$ である。したがって $a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle$ は、 $\rho = 0$ のとき 0 であり、 $\rho > 0$ のときは ρ/r を約分した分数である。 $\rho > 0$ の場合、 a_{n+1} の既約分母は r 以下である。ところが $r < s$ なので、 $a_{n+1} \neq 0$ なら既約分母は前の分母 s より真に小さい。

よって、項が 0 でない間、既約分数で表した分母は正の整数として真に減少し続ける。初項 a_1 の既約分母は高々 q であるから、 $a_1, a_2, \dots, a_q$ がすべて 0 でないことはありえない。したがって $a_q = 0$ である。いったん 0 になれば、定義により次項以降も 0 である。ゆえに q 以上のすべての自然数 n に対して $a_n = 0$ である。

【総評】 (1)(2) は文系第 2 問と同じ固定点処理で、(3) の分母減少が理系版の要点である。目安時間は 22 分。有理数を既約分数 r/s で表したとき、 $1/(r/s) = s/r$ の小数部分が、ユークリッドの割り算の余り ρ によって ρ/r になることを明示できれば自然に証明できる。大学的な連分数の言葉は不要である。注意点は、最初に与えられた p/q が既約とは限らないため、 a_1 の既約分母は「高々 q 」と書くこと、0 になった後は定義により 0 が続くことを最後に確認することである。

【第 3 問】

L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $P(t, 0)$ に対し、原点 O を中心とし点 P を通る円周上を、 P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $Q(u(t), v(t))$ と表す。

(1) $u(t), v(t)$ を求めよ。

(2) $0 < a < 1$ の範囲の実数 a に対し、積分

$$f(a) = \int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2} dt$$

を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

半径 t の円で弧の長さ L だけ進むので、中心角は L/t である。これにより Q の座標は $(t \cos(L/t), t \sin(L/t))$ と表せる。次に $u'(t), v'(t)$ を積の微分と合成関数の微分で求めると、平方和の交差項が消えて $1 + L^2/t^2$ に簡約される。積分は

$$\int \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t} dt$$

であり、原始関数を置いて微分確認する。極限では $a \rightarrow +0$ のとき発散するのは $-L \log a$ の部分だけであることを取り出す。

【解答】

(1) 点 $P(t, 0)$ は、原点中心で半径 t の円周上にある。半径 t の円で弧の長さ L だけ進むとき、対応する中心角は $\frac{L}{t}$ である。 P は正の x 軸上の点なので、そこから反時計回りに角 L/t だけ進んだ点 Q の座標は $u(t) = t \cos \frac{L}{t}$, $v(t) = t \sin \frac{L}{t}$ である。

(2) まず微分する。 $d(L/t)/dt = -L/t^2$ であるから

$$\begin{aligned} u'(t) &= \cos \frac{L}{t} + t \left(-\sin \frac{L}{t} \right) \left(-\frac{L}{t^2} \right) \\ &= \cos \frac{L}{t} + \frac{L}{t} \sin \frac{L}{t}, \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} v'(t) &= \sin \frac{L}{t} + t \cos \frac{L}{t} \left(-\frac{L}{t^2} \right) \\ &= \sin \frac{L}{t} - \frac{L}{t} \cos \frac{L}{t} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2 &= \left(\cos \frac{L}{t} + \frac{L}{t} \sin \frac{L}{t} \right)^2 + \left(\sin \frac{L}{t} - \frac{L}{t} \cos \frac{L}{t} \right)^2 \\ &= \cos^2 \frac{L}{t} + \sin^2 \frac{L}{t} + \frac{L^2}{t^2} \left(\sin^2 \frac{L}{t} + \cos^2 \frac{L}{t} \right) \\ &= 1 + \frac{L^2}{t^2} \end{aligned}$$

である。 $t > 0$ なので

$$\sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2} = \sqrt{1 + \frac{L^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t}$$

となる。

ここで $F(t) = \sqrt{t^2 + L^2} + L \log \frac{t}{\sqrt{t^2 + L^2} + L}$ とおく。微分すると $\frac{d}{dt} \sqrt{t^2 + L^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + L^2}}$ であり、また

$$\frac{d}{dt} \log \frac{t}{\sqrt{t^2 + L^2} + L} = \frac{1}{t} - \frac{t}{\sqrt{t^2 + L^2}(\sqrt{t^2 + L^2} + L)}$$

である。よって整理すると $F'(t) = \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t}$ である。したがって

$$f(a) = \int_a^1 \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t} dt = F(1) - F(a)$$

である。すなわち

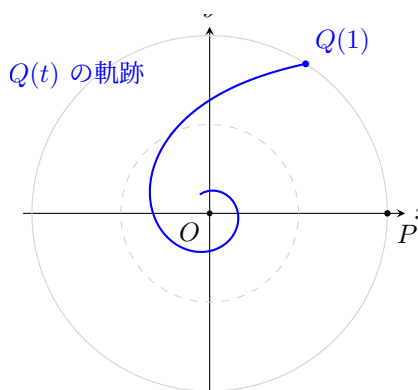
$$\begin{aligned} f(a) &= \sqrt{1 + L^2} - \sqrt{a^2 + L^2} \\ &\quad + L \log \frac{1}{\sqrt{1 + L^2} + L} - L \log \frac{a}{\sqrt{a^2 + L^2} + L} \end{aligned}$$

である。

(3) $a \rightarrow +0$ のとき $\sqrt{a^2 + L^2} \rightarrow L$ であり、 $\log(\sqrt{a^2 + L^2} + L) \rightarrow \log(2L)$ である。一方、 $\log \frac{a}{\sqrt{a^2 + L^2} + L} = \log a - \log(\sqrt{a^2 + L^2} + L)$ である。したがって $f(a)$ のうち $a \rightarrow +0$ で発散する部分は $-L \log a$ だけであり、残りは有限な値に近づく。

よって $\frac{f(a)}{\log a} \rightarrow -L$ である。したがって $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{\log a} = -L$ である。

t を小さくすると、点 $Q(t)$ は原点へ近づきながら回転する。図は $L = 1$ の例である。



▶ 解法 2 (平方根を新変数にして積分する)

【方針】

(1) から速さを求めるところまでは同じである。原始関数を予想する代わりに、 $s = \sqrt{t^2 + L^2}$ と置いて有理関数の積分へ変換する。部分分数分解すれば対数項が自然に現れ、極限の発散項も読み取れる。

【解答】

(1) 半径 t の円周を長さ L だけ進むと中心角は L/t だから

$$u(t) = t \cos \frac{L}{t}, \quad v(t) = t \sin \frac{L}{t}$$

である。

(2) 微分して平方和を取ると

$$\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2 = 1 + \frac{L^2}{t^2}.$$

$t > 0$ より

$$f(a) = \int_a^1 \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t} dt.$$

ここで

$$s = \sqrt{t^2 + L^2}$$

とおく。 $s ds = t dt$ 、 $t^2 = s^2 - L^2$ だから

$$\frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t} dt = \frac{s^2}{s^2 - L^2} ds = \left(1 + \frac{L^2}{s^2 - L^2}\right) ds.$$

さらに

$$\frac{L^2}{s^2 - L^2} = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{s - L} - \frac{1}{s + L} \right)$$

である。したがって原始関数は

$$s + \frac{L}{2} \log \frac{s - L}{s + L}.$$

$s^2 - L^2 = t^2$ を使うと

$$\frac{s - L}{s + L} = \frac{t^2}{(s + L)^2}$$

なので、これは

$$\sqrt{t^2 + L^2} + L \log \frac{t}{\sqrt{t^2 + L^2} + L}$$

に等しい。よって

$$f(a) = \sqrt{1 + L^2} - \sqrt{a^2 + L^2} + L \log \frac{1}{\sqrt{1 + L^2} + L} - L \log \frac{a}{\sqrt{a^2 + L^2} + L}.$$

(3) $a \rightarrow +0$ のとき、上式で有界でない項は $-L \log a$ だけである。したがって

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{\log a} = -L$$

である。

【総評】 円運動の座標表示から曲線の長さの積分へ進む問題である。目安時間は 24 分。最初の中心角 L/t を正しく置ければ、(1) はすぐに出る。(2) は u', v' の交差項が打ち消し合うため、平方和を省略せずに書くと計算の見通しがよい。原始関数は形がやや重いので、答案では微分確認を一行入れると説得力が増す。(3) では $\log a \rightarrow -\infty$ であるため、符号を逆にしやすい。発散項が $-L \log a$ であることを明示してから比を取ると安全である。

【第 4 問】

座標平面上の 1 点

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

をとる。放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ を, 3 点 P , Q , R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき, $\triangle PQR$ の重心 $G(X, Y)$ の軌跡を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

底辺が QR の二等辺三角形なので、条件は $PQ = PR$ である。放物線上の点 (t, t^2) と $P(1/2, 1/4)$ の距離の 2 乗を $F(t)$ とおき、 $F(\alpha) = F(\beta)$ を $\alpha - \beta$ で因数分解する。 $Q \neq R$ なので $\alpha \neq \beta$ として、 $s = \alpha + \beta$, $r = \alpha\beta$ で整理する。重心は s と $\alpha^2 + \beta^2$ で表せるので、条件から X, Y の関係式を得る。最後に、相異なる実数 α, β が存在する条件を判別式で確認し、軌跡の範囲を決める。

【解答】

放物線上の点 (t, t^2) と $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ との距離の 2 乗を $F(t) = (t - \frac{1}{2})^2 + (t^2 - \frac{1}{4})^2$ とおく。 $\triangle PQR$ が QR を底辺とする二等辺三角形であることは $PQ = PR$ すなわち $F(\alpha) = F(\beta)$ を意味する。また三角形をなすので $Q \neq R$ 、すなわち $\alpha \neq \beta$ である。

まず $F(t)$ を整理すると $F(t) = t^4 + \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{5}{16}$ である。したがって

$$\begin{aligned} F(\alpha) - F(\beta) &= (\alpha^4 - \beta^4) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta) \left\{ (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1 \right\} \end{aligned}$$

である。 $\alpha \neq \beta$ だから $(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1 = 0$ である。

ここで $s = \alpha + \beta$, $r = \alpha\beta$ とおく。すると $\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2r$ であるから、上の条件は $s(s^2 - 2r) + \frac{s}{2} - 1 = 0$ となる。もし $s = 0$ なら左辺は -1 となり不可能である。よって $s \neq 0$ であり、 $s^2 - 2r = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$ を得る。すなわち $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$ である。

重心 $G(X, Y)$ について $X = \frac{1/2 + \alpha + \beta}{3} = \frac{s + 1/2}{3}$ であり、

$$Y = \frac{1/4 + \alpha^2 + \beta^2}{3} = \frac{1/4 + 1/s - 1/2}{3} = \frac{1}{3s} - \frac{1}{12}$$

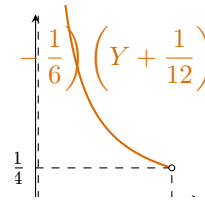
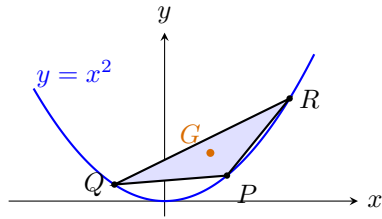
である。 $X = (s + 1/2)/3$ より $s = 3X - \frac{1}{2} = \frac{6X - 1}{2}$ であるから、これを Y に代入すると $Y = \frac{1}{3(3X - 1/2)} - \frac{1}{12} = \frac{3 - 2X}{4(6X - 1)}$ である。

次に範囲を決める。 α, β が相異なる実数として存在するためには、2 次方程式 $T^2 - sT + r = 0$ が相異なる実数解をもてばよい。すなわち $s^2 - 4r > 0$ が必要十分である。上で得た $s^2 - 2r = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$ から $2r = s^2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2}$ である。したがって $s^2 - 4r = s^2 - 2(s^2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2}) = -s^2 - 1 + \frac{2}{s}$ である。

また $\alpha^2 + \beta^2 = 1/s - 1/2 \geq 0$ であるから、特に $s > 0$ でなければならない。 $s > 0$ のもとで $-s^2 - 1 + \frac{2}{s} > 0$ は、両辺に正の s をかけて $s^3 + s < 2$ と同値である。関数 $s^3 + s$ は $s > 0$ で単調増加し、 $s = 1$ で 2 となるので、 $0 < s < 1$ である。 $s = 3X - 1/2$ だから、これは $0 < 3X - \frac{1}{2} < 1$ すなわち $\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}$ である。逆に、この範囲の X に対しては $0 < s < 1$ となり、判別式が正なので相異なる実数 α, β が存在する。

したがって求める軌跡は $Y = \frac{3 - 2X}{4(6X - 1)}$, $\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}$ である。

放物線上の 2 点 Q, R 、頂点 P 、重心 G と、重心の軌跡の関係は次図のようになる。



▶ 解法 2 (弦の垂直二等分線を使う)

【方針】

弦 QR の中点を M とする。二等辺条件 $PQ = PR$ を $PM \perp QR$ と読み替えると、弦の傾き $\alpha + \beta$ と中点座標だけで条件を書ける。対称式から重心を出し、最後に α, β が相異なる実数となる範囲を判別式で決める。

【解答】

弦 QR の中点を M とする。また

$$s = \alpha + \beta, \quad r = \alpha\beta$$

とおく。 $Q \neq R$ であり、弦 QR の傾きは

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = s$$

である。一方、

$$M\left(\frac{s}{2}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)$$

である。

$PQ = PR$ は、点 P が弦 QR の垂直二等分線上にあることと同値である。したがって $PM \perp QR$ であり、

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) + s\left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right) = 0$$

となる。 $s = 0$ なら左辺は $1/2$ となるので $s \neq 0$ である。整理すると

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$$

を得る。

重心 $G(X, Y)$ について

$$X = \frac{1/2 + s}{3}, \quad Y = \frac{1/4 + \alpha^2 + \beta^2}{3} = \frac{1}{3s} - \frac{1}{12}$$

である。したがって $s = 3X - 1/2$ を消去すると

$$\left(X - \frac{1}{6}\right)\left(Y + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{9}$$

となる。

残るのは s の範囲である。

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \geq 0$$

かつ $s \neq 0$ なので $s > 0$ である。また

$$2r = s^2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2}$$

だから、 α, β が相異なる実数である条件は

$$s^2 - 4r = -s^2 - 1 + \frac{2}{s} > 0.$$

$s > 0$ より、これは

$$s^3 + s < 2$$

と同値である。左辺は $s > 0$ で単調増加し、 $s = 1$ で 2 となるので

$$0 < s < 1$$

である。よって

$$\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}$$

となる。

したがって求める軌跡は

$$\left(X - \frac{1}{6}\right) \left(Y + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}$$

である。

【総評】 二等辺条件を距離の等式、または垂直二等分線として対称式に直す軌跡問題である。目安時間は 25 分。式の関係だけなら比較的短い、 α, β が相異なる実数として存在する範囲を最後に確認しないと軌跡として不十分になる。 $s = \alpha + \beta$ が 0 でないこと、さらに $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$ から $s > 0$ が必要になることを飛ばさないのが重要である。端点 $X = 1/6, 1/2$ は、それぞれ $s = 0, 1$ に対応し、三角形の条件または相異なる実数条件を満たさないため含まれない。

【第 5 問】

p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件

$$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p, \quad b \leq c \leq a$$

を満たすものを考え、このような a, b, c を $[a, b; c]$ の形に並べたものを (p, q) パターンと呼ぶ。各 (p, q) パターン $[a, b; c]$ に対して

$$w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$$

とおく。

(1) (p, q) パターンのうち、 $w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また、 $w([a, b; c]) = p$ となる (p, q) パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2) s を整数とする。 (p, p) パターンで $w([a, b; c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

(3) (p, p) パターンの総数を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$ は c に依存しないので、まず指定された w の値を $a + b$ の条件へ直す。(1) は端の和になり、 a, b は一意に決まる。(2) では $p = q$ として $a + b = p - s$ を固定する。 a の取り得る範囲は s により変わるため、 $s < 0$ 、 $0 \leq s \leq p$ 、 $p \leq s \leq 2p$ 、 $s > 2p$ に分ける。各 a に対して c は $a - b + 1$ 通りである。(3) は (2) の個数を s で合計する。別解として、総数だけなら $b = -j$ と置き、 a, j を直接動かして $a + j + 1$ を二重和にしてもよい。

【解答】

(1) $w([a, b; c]) = -q$ となる条件は $p - q - (a + b) = -q$ すなわち $a + b = p$ である。条件より $0 \leq a \leq p$ 、 $b \leq 0$ なので、 $a + b = p$ となるのは $a = p$ 、 $b = 0$ の場合に限られる。このとき c は $0 \leq c \leq p$ を満たす整数であるから、 $p + 1$ 通りである。

また $w([a, b; c]) = p$ となる条件は $p - q - (a + b) = p$ すなわち $a + b = -q$ である。条件より $a \geq 0$ 、 $b \geq -q$ なので、 $a + b = -q$ となるのは $a = 0$ 、 $b = -q$ の場合に限られる。このとき c は $-q \leq c \leq 0$ を満たす整数であるから、 $q + 1$ 通りである。

したがって答えは $p + 1$ 、 $q + 1$ である。

(2) 以下 $p = q$ とする。このとき $w([a, b; c]) = -(a + b)$ である。したがって $w([a, b; c]) = -p + s$ は $a + b = p - s$ と同値である。

条件 $0 \leq a \leq p$ 、 $-p \leq b \leq 0$ から $-p \leq a + b \leq p$ である。したがって $p - s$ がこの範囲に入らない、すなわち $s < 0$ または $s > 2p$ のとき、個数は 0 である。

次に $0 \leq s \leq p$ とする。 $b = p - s - a$ とおくと、 $b \leq 0$ から $a \geq p - s$ 、また $a \leq p$ である。よって $p - s \leq a \leq p$ である。各 a に対して c は $b \leq c \leq a$ を満たす整数であるから、その個数は $a - b + 1 = a - (p - s - a) + 1 = 2a - p + s + 1$ である。したがって個数は $\sum_{a=p-s}^p (2a - p + s + 1) = (s + 1)(p + 1)$ である。

次に $p \leq s \leq 2p$ とする。このとき $b = p - s - a$ とおくと、 $b \geq -p$ から $p - s - a \geq -p$ すなわち $a \leq 2p - s$ である。また $a \geq 0$ なので $0 \leq a \leq 2p - s$ である。各 a に対する c の個数は同じく $2a - p + s + 1$ であるから、求める個数は $\sum_{a=0}^{2p-s} (2a - p + s + 1)$ である。 $m = 2p - s$ とおくと $\sum_{a=0}^m (2a - p + s + 1) = (m + 1)(-p + s + 1) + m(m + 1)$ であり、 $m = 2p - s$ を戻すと $(2p - s + 1)(p + 1)$ となる。

以上より、個数は

$$\begin{cases} 0 & (s < 0), \\ (s + 1)(p + 1) & (0 \leq s \leq p), \\ (2p - s + 1)(p + 1) & (p \leq s \leq 2p), \\ 0 & (s > 2p) \end{cases}$$

である。 $s = p$ では中央の 2 式が同じ値 $(p + 1)^2$ を与える。

(3) (2) の結果を全ての整数 s について足せば、 (p, p) パターンの総数が得られる。ただし $s = p$ を二重に数えないように、後半の和は $s = p + 1$ から始める。

$$\begin{aligned} \text{総数} &= \sum_{s=0}^p (s + 1)(p + 1) + \sum_{s=p+1}^{2p} (2p - s + 1)(p + 1) \\ &= (p + 1) \left\{ \sum_{s=0}^p (s + 1) + \sum_{s=p+1}^{2p} (2p - s + 1) \right\} \\ &= (p + 1) \left\{ \frac{(p + 1)(p + 2)}{2} + \frac{p(p + 1)}{2} \right\} \\ &= (p + 1)^3 \end{aligned}$$

である。したがって $(p + 1)^3$ である。

▶ 解法 2 (正方形内の対角線で数える)

【方針】

$j = -b$ とおくと (a, j) は整数格子の正方形 $0 \leq a, j \leq p$ を動く。重みの条件は対角線 $a - j = p - s$ になり、各格子点に対して c は $a + j + 1$ 通りある。対角線上の重み付き格子点数として (2) を求め、(3) は正方形全体の二重和で出す。

【解答】

(1) $w = -q$ は $a + b = p$ と同値であり、範囲条件から $a = p, b = 0$ に限る。 $c = 0, 1, \dots, p$ なので $p + 1$ 通りである。同様に $w = p$ は $a + b = -q$ と同値であり、 $a = 0, b = -q$ に限るから $c = -q, -q + 1, \dots, 0$ の $q + 1$ 通りである。

(2) $p = q$ とし、 $j = -b$ とおく。すると

$$0 \leq a \leq p, \quad 0 \leq j \leq p, \quad w = j - a$$

である。また固定した (a, j) に対し、 $-j \leq c \leq a$ だから c は

$$a + j + 1$$

通りある。

$w = -p + s$ は

$$a - j = p - s$$

と同値である。 $s < 0$ または $s > 2p$ なら正方形内に格子点はない。

$0 \leq s \leq p$ のとき、対角線上の格子点は

$$(a, j) = (p - s + k, k) \quad (k = 0, 1, \dots, s)$$

である。各点の c の個数は $p - s + 2k + 1$ だから、総数は

$$\sum_{k=0}^s (p - s + 2k + 1) = (s + 1)(p + 1).$$

$p \leq s \leq 2p$ のとき、 $h = s - p$ とおけば格子点は

$$(a, j) = (k, k + h) \quad (k = 0, 1, \dots, p - h)$$

である。よって総数は

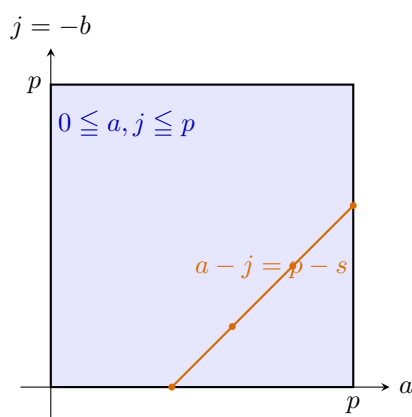
$$\sum_{k=0}^{p-h} (2k + h + 1) = (p - h + 1)(p + 1) = (2p - s + 1)(p + 1).$$

したがって

$$\begin{cases} 0 & (s < 0), \\ (s + 1)(p + 1) & (0 \leq s \leq p), \\ (2p - s + 1)(p + 1) & (p \leq s \leq 2p), \\ 0 & (s > 2p) \end{cases}$$

である。

条件 $a - j = p - s$ は、正方形内を横切る傾き 1 の対角線になる。



(3) 正方形内のすべての (a, j) を直接動かすと、総数は

$$\begin{aligned} \sum_{a=0}^p \sum_{j=0}^p (a + j + 1) &= (p + 1) \sum_{a=0}^p a + (p + 1) \sum_{j=0}^p j + (p + 1)^2 \\ &= (p + 1)^3. \end{aligned}$$

【総評】 文系第 3 問を全範囲の s と総数まで拡張した問題である。目安時間は 22 分。 w が $a + b$ だけで決まること、固定した a, b に対して c が $a - b + 1$ 通りあることが軸になる。(2) は $0 \leq s \leq p$ と $p \leq s \leq 2p$ で a の動く範囲が変わるため、境界を丁寧に書く必要がある。(3) では $s = p$ の二重計上に注意する。総数については直接二重和で数える別解も短く、検算として有効である。

【第 6 問】

- (1) x, y を実数とし, $x > 0$ とする。 t を変数とする 2 次関数 $f(t) = xt^2 + yt$ の $0 \leq t \leq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。
- (2) 次の条件を満たす点 (x, y) 全体からなる座標平面内の領域を S とする。
 $x > 0$ かつ, 実数 z で $0 \leq t \leq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

- (3) 次の条件を満たす点 (x, y, z) 全体からなる座標空間内の領域を V とする。
 $0 \leq x \leq 1$ かつ, $0 \leq t \leq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して,

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

が成り立つ。

V の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $x > 0$ なので $f(t) = xt^2 + yt$ が下に凸（上に開く）であることを使う。最大値は端点のどちらか、最小値は頂点が区間内であれば頂点、なければ端点で生じる。境界は $y = 0, -x, -2x$ で分かれる。(2) は、ある z を足して全値を $[0, 1]$ に収められる条件が、 $xt^2 + yt$ の最大値と最小値の差が 1 以下であることに等しいと読む。(3) では固定した (x, y) に対して許される z の長さが $1 - R(x, y)$ になる。ただし $0 \leq x \leq 1$ なので、(2) のうち $0 < x \leq 1$ の帯だけを使い、 y を 4 区間に分けて断面積を出してから x で積分する。

【解答】

(1) $x > 0$ なので $f(t) = xt^2 + yt$ は下に凸、すなわち上に開く 2 次関数である。端点での値は $f(0) = 0, \quad f(1) = x + y$ である。また頂点の t 座標は $t = -\frac{y}{2x}$ であり、頂点での値は $-\frac{y^2}{4x}$ である。

最大値と最小値の差を $R(x, y)$ と書く。下に凸の 2 次関数なので、最大値は区間の端点で生じる。一方、最小値は頂点が $[0, 1]$ に入るかどうかで変わる。

まず $y \geq 0$ のとき、頂点は $t \leq 0$ にあり、 $[0, 1]$ では $f(t)$ は増加する。したがって最小値は 0、最大値は $x + y$ であり $R(x, y) = x + y$ である。

次に $-x \leq y \leq 0$ のとき、頂点は $[0, 1]$ に入り、さらに $x + y \geq 0$ である。したがって最大値は $f(1) = x + y$ 、最小値は頂点での値 $-\frac{y^2}{4x}$ である。よって $R(x, y) = x + y + \frac{y^2}{4x} = \frac{(2x + y)^2}{4x}$ である。

次に $-2x \leq y \leq -x$ のとき、頂点は $[0, 1]$ に入り、 $x + y \leq 0$ である。したがって最大値は $f(0) = 0$ 、最小値は $-\frac{y^2}{4x}$ であり $R(x, y) = \frac{y^2}{4x}$ である。

最後に $y \leq -2x$ のとき、頂点は $t \geq 1$ にあり、 $[0, 1]$ では $f(t)$ は減少する。したがって最大値は 0、最小値は $x + y$ であり $R(x, y) = -x - y$ である。

以上より

$$R(x, y) = \begin{cases} x + y & (y \geq 0), \\ \frac{(2x + y)^2}{4x} & (-x \leq y \leq 0), \\ \frac{y^2}{4x} & (-2x \leq y \leq -x), \\ -x - y & (y \leq -2x) \end{cases}$$

である。

(2) $g(t) = xt^2 + yt$ とおく。ある実数 z が存在して $0 \leq g(t) + z \leq 1 \quad (0 \leq t \leq 1)$ となるためには、 $g(t)$ の最大値と最小値の差が 1 以下であることが必要十分である。実際、 g の最小値を m 、最大値を M とすれば、条件は $-z \leq g(t) \leq 1 - z$ が全ての t で成り立つことであり、これは区間 $[m, M]$ が長さ 1 の区間に入ること、すなわち $M - m \leq 1$ と同値である。

したがって S は $x > 0$, $R(x, y) \leq 1$ を満たす点全体である。(1) の場合分けから整理する。 $0 < x \leq 1$ では、4 つの範囲がつながって $-x-1 \leq y \leq 1-x$ となる。実際、上側は $y \geq 0$ の場合の $x+y \leq 1$ から $y \leq 1-x$ 、下側は $y \leq -2x$ の場合の $-x-y \leq 1$ から $y \geq -x-1$ であり、中間の 2 区間はこの間を埋める。

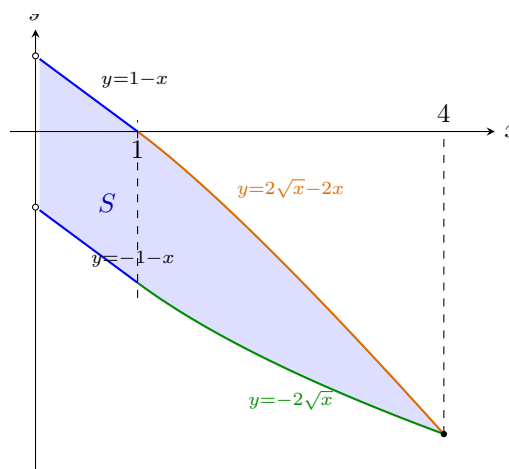
一方、 $1 \leq x \leq 4$ では、直線で決まる上下の部分は消え、中央の 2 つの場合から $-2\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}-2x$ を得る。これは $\frac{y^2}{4x} \leq 1$ から $y \geq -2\sqrt{x}$ 、および $\frac{(2x+y)^2}{4x} \leq 1$ から $2x+y \leq 2\sqrt{x}$ 、すなわち $y \leq 2\sqrt{x}-2x$ が出るためである。これらが交わるには $x \leq 4$ が必要である。 $x > 4$ では該当する点はない。

したがって S は

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1, & -x-1 \leq y \leq 1-x, \\ 1 \leq x \leq 4, & -2\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}-2x \end{cases}$$

で表される領域である。図示すると、 $0 < x \leq 1$ では 2 直線 $y = 1-x$ 、 $y = -x-1$ にはさまれ、 $1 \leq x \leq 4$ では 2 曲線 $y = 2\sqrt{x}-2x$ 、 $y = -2\sqrt{x}$ にはさまれる。境界は含むが、 $x = 0$ は含まない。

領域 S は次の青色部分である。 $x = 0$ 上の点は含まず、それ以外の境界は含む。



(3) $0 < x \leq 1$ を固定する。 $g(t) = xt^2 + yt$ の最小値を m 、最大値を M とする。このとき、条件 $0 \leq g(t) + z \leq 1$ がすべての t で成り立つための z の範囲は $-m \leq z \leq 1-M$ である。したがって許される z の長さは $(1-M) - (-m) = 1 - (M-m) = 1 - R(x, y)$ である。 $0 < x \leq 1$ のとき、 y の範囲は $-x-1 \leq y \leq 1-x$ であり、(1) の場合分けに従って

$$-x-1 \leq y \leq -2x, \quad -2x \leq y \leq -x, \quad -x \leq y \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1-x$$

の 4 区間に分ける。固定した x における断面積を $A(x)$ とすると

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_{-x-1}^{-2x} (1+x+y) dy + \int_{-2x}^{-x} \left(1 - \frac{y^2}{4x}\right) dy \\ &\quad + \int_{-x}^0 \left(1 - \frac{(2x+y)^2}{4x}\right) dy + \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \end{aligned}$$

である。

それぞれ計算すると

$$\int_{-x-1}^{-2x} (1+x+y) dy = \frac{(1-x)^2}{2}, \quad \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \frac{(1-x)^2}{2}$$

である。また

$$\int_{-2x}^{-x} \left(1 - \frac{y^2}{4x}\right) dy = x - \frac{7x^2}{12}$$

であり、 $u = 2x + y$ とおくと

$$\int_{-x}^0 \left(1 - \frac{(2x+y)^2}{4x}\right) dy = \int_x^{2x} \left(1 - \frac{u^2}{4x}\right) du = x - \frac{7x^2}{12}$$

である。

したがって $A(x) = (1-x)^2 + 2x - \frac{7x^2}{6} = 1 - \frac{x^2}{6}$ となる。 $x=0$ の断面は体積に影響しないので、求める体積は

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{18}\right]_0^1 = \frac{17}{18}$$

である。

▶ 解法 2 (対称変数 $v = x + y$ で体積を求める)

【方針】

(1)(2) の値域幅を確認した後、(3) では $v = x + y$ とおく。変換 $t \mapsto 1-t$ により値域幅は v の符号に関して対称になる。したがって $v \geq 0$ の半分だけを積分すればよく、4 区間の積分を 2 区間へ減らせる。

【解答】

(1) $f(t) = xt^2 + yt$ の最大値と最小値の差を $R(x, y)$ とする。頂点は $t = -y/(2x)$ 、端点値は $0, x+y$ だから

$$R(x, y) = \begin{cases} x+y & (y \geq 0), \\ \frac{(2x+y)^2}{4x} & (-x \leq y \leq 0), \\ \frac{y^2}{4x} & (-2x \leq y \leq -x), \\ -x-y & (y \leq -2x) \end{cases}$$

である。

(2) ある z により $f(t) + z$ の値域を $[0, 1]$ に収められるための必要十分条件は

$$R(x, y) \leq 1$$

である。(1) の各場合を解くと

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1, & -x-1 \leq y \leq 1-x, \\ 1 \leq x \leq 4, & -2\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}-2x \end{cases}$$

となる。

(3) $0 < x \leq 1$ を固定する。許される z の長さは

$$1 - R(x, y)$$

である。ここで

$$v = x + y$$

とおくと、 y の範囲 $-x-1 \leq y \leq 1-x$ は

$$-1 \leq v \leq 1$$

になる。また $t \mapsto 1-t$ と変数を反転すると、値域幅は v と $-v$ で同じになる。実際、(1) の式から

$$R(x, -x+v) = \begin{cases} \frac{(x+|v|)^2}{4x} & (|v| \leq x), \\ |v| & (x \leq |v| \leq 1) \end{cases}$$

である。

したがって、固定した x における yz 断面積は対称性により

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 \int_0^x \left\{1 - \frac{(x+v)^2}{4x}\right\} dv + 2 \int_x^1 (1-v) dv \\ &= 2 \left(x - \frac{7x^2}{12}\right) + (1-x)^2 \\ &= 1 - \frac{x^2}{6}. \end{aligned}$$

よって体積は

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx = \frac{17}{18}$$

である。

【総評】 2 次関数の値域を平面領域・空間領域に翻訳する総合問題である。目安時間は 35 分以上。(1) の場合分けが以後の土台で、境界 $y = 0, -x, -2x$ は、頂点の位置と端点値 $0, x + y$ の大小から出る。(2) では「ある z が存在する」を、値域の幅 $R(x, y)$ が 1 以下であることに言い換えるのが本質である。(3) は固定した (x, y) に対する z の長さが $1 - R(x, y)$ になると見れば、体積が断面積の積分に落ちる。計算量が多いので、4 つの y 区間を図や表で整理してから積分に入ると、境界の取り違えを防げる。