

東京大学 2012 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面上の点 (x, y) が次の方程式を満たす。

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき、 x のとりうる最大の値を求めよ。

【方針】

与式を固定した x に対する y の 2 次方程式とみる。最高次係数は $3 > 0$ なので、ある実数 y が存在する条件は判別式が 0 以上であることと一致する。この判別式を x だけの 2 次不等式に直し、得られる閉区間の右端を求める。最後に判別式が 0 になる端点でも実数 y が存在することを確認し、最大値が単なる上限ではなく実際に達成されることまで押さえる。

【解答】

与えられた方程式を y について整理すると $3y^2 + (4x + 5)y + 2x^2 + 4x - 4 = 0$ である。ここで x を固定して考える。実数 y が存在するための必要十分条件は、この 2 次方程式の判別式が 0 以上であることである。判別式を計算すると $\Delta = (4x + 5)^2 - 4 \cdot 3(2x^2 + 4x - 4)$ であり、展開して $\Delta = 16x^2 + 40x + 25 - 24x^2 - 48x + 48 = -8x^2 - 8x + 73$ となる。したがって条件は $-8x^2 - 8x + 73 \geq 0$ すなわち $8x^2 + 8x - 73 \leq 0$ である。

この 2 次方程式 $8x^2 + 8x - 73 = 0$ の解は

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 73}}{16} = \frac{-8 \pm 20\sqrt{6}}{16} = \frac{-2 \pm 5\sqrt{6}}{4}$$

である。よって実数 y が存在する x の範囲は $\frac{-2 - 5\sqrt{6}}{4} \leq x \leq \frac{-2 + 5\sqrt{6}}{4}$ である。

右端では判別式が 0 であり、そのとき $y = -\frac{4x + 5}{6}$ が実数として定まるので、右端の x は実際にとられる。したがって x のとりうる最大値は $\frac{5\sqrt{6} - 2}{4}$ である。

【総評】 難度 4、目安時間 6 分。2 次曲線の標準形に直すより、 y を消去する判別式処理が最短で安定する。採点上は、 y についての 2 次方程式と見ること、判別式 $-8x^2 - 8x + 73$ の符号を間違えないこと、右端で判別式が 0 となり最大値が実際に達成されることを書くのが要点である。計算は軽い、最後に左端ではなく右端を選ぶ取り違えが起こりやすい。

【第 2 問】

実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし、座標平面上の 4 点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(t, 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle ACO = \angle BCD$ となるように定める。

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

【方針】

まず角の条件を直線 CD の傾きに変換する。 C から見た CO は左向きの水平線で、 $CA = (-t, 1)$ なので $\tan \angle ACO = 1/t$ である。したがって CB から同じ角だけ上がる直線 CD の傾きも $1/t$ になる。これを直線 $AB: x + y = 1$ と連立して D を求め、三角形 ACD の面積を t の 1 変数関数にする。最後は $0 < t < 1$ の开区間で微分し、端点で面積が 0 に近づくことと内部の停留点で最大をとることを確認する。

【解答】

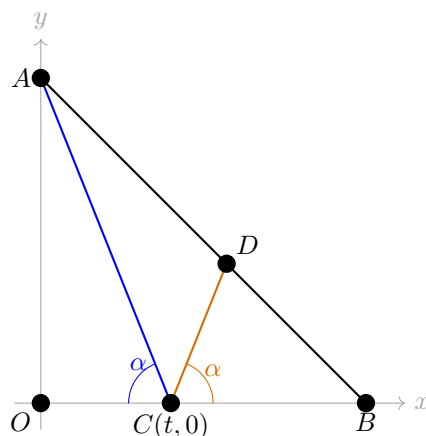
直線 AB の方程式は $x + y = 1$ である。点 $C(t, 0)$ から見て $\overrightarrow{CO} = (-t, 0)$, $\overrightarrow{CA} = (-t, 1)$ であるから、左向きの水平線 CO と CA のなす角について $\tan \angle ACO = \frac{1}{t}$ である。

また $\overrightarrow{CB} = (1 - t, 0)$ は右向きの水平線である。条件 $\angle ACO = \angle BCD$ より、直線 CD は右向きの水平線から角 $\angle ACO$ だけ上がる直線であるから、その傾きは $\frac{1}{t}$ である。したがって直線 CD は $y = \frac{x - t}{t}$ と書ける。

これを $x + y = 1$ と連立すると $x + \frac{x - t}{t} = 1$ であり、両辺に t を掛けて $(1 + t)x = 2t$ を得る。

したがって $D\left(\frac{2t}{1+t}, \frac{1-t}{1+t}\right)$ を得る。

角条件と各点の位置関係は、例えば次の図のようになる。



ここで $0 < t < 1$ より $0 < 2t/(1+t) < 1$ 、 $0 < (1-t)/(1+t) < 1$ なので、確かに D は線分 AB 上にある。
 三角形 ACD の面積を $S(t)$ とする。

$$\overrightarrow{AC} = (t, -1), \quad \overrightarrow{AD} = \left(\frac{2t}{1+t}, -\frac{2t}{1+t}\right)$$

であるから

$$S(t) = \frac{1}{2} \left| t \left(-\frac{2t}{1+t}\right) - (-1) \frac{2t}{1+t} \right|$$

である。したがって $S(t) = \frac{t(1-t)}{1+t}$ ($0 < t < 1$) となる。

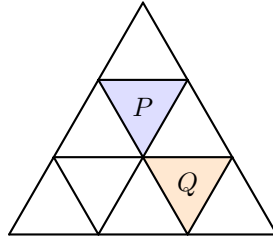
微分すると $S'(t) = \frac{(1-2t)(1+t) - (t-t^2)}{(1+t)^2} = \frac{1-2t-t^2}{(1+t)^2}$ である。分母は正なので、符号は $1-2t-t^2 = 2-(t+1)^2$ で決まる。 $0 < t < 1$ で $S'(t) = 0$ となるのは $t = \sqrt{2}-1$ のときだけである。また $0 < t < \sqrt{2}-1$ で $S'(t) > 0$ 、 $\sqrt{2}-1 < t < 1$ で $S'(t) < 0$ である。

さらに $t \rightarrow 0+$ 、 $t \rightarrow 1-$ では $S(t) \rightarrow 0$ であるから、最大は $t = \sqrt{2}-1$ にとる。このとき $S(\sqrt{2}-1) = \frac{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$ であり、分子を整理すると $(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}-4$ なので $S(\sqrt{2}-1) = 3-2\sqrt{2}$ である。したがって求める最大値は $3-2\sqrt{2}$ である。

【総評】 難度 5、目安時間 10 分。角条件を傾きへ落とす最初の一手が勝負で、ここで CO と CB の向きが反対であることを図で確認したい。 D の座標を出した後は、面積を行列式型の計算で $t(1-t)/(1+t)$ に整理すれば標準的な最大値問題になる。失点しやすいのは、 D が線分 AB 上に入る確認、开区間 $0 < t < 1$ の端点で最大が出ない確認、最大値の根号整理である。

【第 3 問】

図のように、正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り、部屋 P , Q を定める。



1 つの球が部屋 P を出発し、1 秒ごとに、そのままその部屋にとどまることなく、辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

図の小三角形は上向きと下向きが交互に隣接しているの、下向きの部屋 P から出発すると奇数秒後には必ず上向きの部屋にいる。したがって Q に到達できるのは偶数秒後だけである。偶数秒だけを見れば、下向きの 3 部屋 P, R, Q の間の 2 秒ごとの移動に圧縮できる。図から、任意の下向き部屋から 2 秒後に同じ部屋へ戻る確率は $2/3$ 、他の 2 つの下向き部屋へ移る確率はそれぞれ $1/6$ である。対称性により P 以外の 2 部屋の確率を同じ文字で置き、1 次漸化式を解く。

【解答】

図の下向きの小三角形は 3 つあり、出発点を P 、到着点を Q 、残り 1 つを R と呼ぶことにする。

1 秒ごとに辺を共有する隣の部屋へ移るので、下向きの部屋から 1 秒後には上向きの部屋へ、上向きの部屋から 1 秒後には下向きの部屋へ移る。したがって、下向きの部屋 P から出発した球は、奇数秒後には上向きの部屋にいる。よって奇数 n については、 n 秒後に下向きの部屋 Q にいる確率は 0 である。

次に偶数秒後を考える。下向きの 1 つの部屋から出発して 2 秒後にどの下向き部屋にいるかを調べる。図を見ると、どの下向き部屋にも 3 つの隣室がある。そのうち 1 つは外側の隅にある上向き部屋で、そこからは元の下向き部屋へ戻るしかない。残り 2 つの上向き部屋は、それぞれ元の下向き部屋と他の下向き部屋 1 つに辺で接している。

したがって、たとえば P から出発したとき、2 秒後に P へ戻る確率は $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ である。また、2 秒後に R へ移る確率と Q へ移る確率はいずれも $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ である。同じ関係は R, Q から出発しても成り立つ。2 m 秒後に Q にいる確率を q_m とする。図は R と Q について対称なので、2 m 秒後に R にいる確率も q_m である。したがって P にいる確率は $1 - 2q_m$ である。

次の 2 秒で Q にいる確率を考えると、 P から Q へ移る確率は $1/6$ 、 R から Q へ移る確率も $1/6$ 、 Q から Q へ戻る確率は $2/3$ であるから $q_{m+1} = \frac{1}{6}(1 - 2q_m) + \frac{1}{6}q_m + \frac{2}{3}q_m$ である。右辺を整理して $q_{m+1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q_m$ を得る。また、出発時には Q にいないので $q_0 = 0$ である。

この漸化式の一定値を求めると、 $q = 1/6 + (1/2)q$ より $q = 1/3$ である。したがって $q_{m+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(q_m - \frac{1}{3})$ であり、 $q_0 = 0$ から $q_m - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^m$ となる。よって $q_m = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2^m})$ である。

以上より、求める確率は

$$\begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}), \\ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) & (n = 2m, m = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2 (確率差の漸化式)

【方針】

奇数秒後の確率が 0 であることを先に分ける。偶数秒後だけを見て、 P にいる確率を p_m 、残る 2 つの下向き部屋にいる確率をそれぞれ q_m とする。2 秒推移から $p_m - q_m$ が毎回 $1/2$ 倍になることを示し、全確率 $p_m + 2q_m = 1$ と連立する。

【解答】

下向きの 3 部屋を P, R, Q とする。下向きの部屋から 1 秒後には上向きの部屋へ移り、上向きの部屋から 1 秒後には下向きの部屋へ移る。したがって、奇数秒後に下向きの部屋 Q にいる確率は 0 である。

以下、 $2m$ 秒後だけを考える。図の対称性により、 $2m$ 秒後に P にいる確率を p_m 、 R, Q にいる確率をそれぞれ q_m と書ける。明らかに

$$p_m + 2q_m = 1 \quad (1)$$

である。

どの下向き部屋から出ても、2 秒後に同じ部屋へ戻る確率は $2/3$ 、他の各下向き部屋へ移る確率は $1/6$ である。よって

$$\begin{aligned} p_{m+1} &= \frac{2}{3}p_m + \frac{1}{6}q_m + \frac{1}{6}q_m, \\ q_{m+1} &= \frac{1}{6}p_m + \frac{1}{6}q_m + \frac{2}{3}q_m \end{aligned}$$

となる。2 式の差をとると

$$p_{m+1} - q_{m+1} = \frac{1}{2}(p_m - q_m).$$

初期状態は $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ だから

$$p_m - q_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m. \quad (2)$$

(1)、(2) から $1 - 3q_m = 2^{-m}$ であり、

$$q_m = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^m}\right).$$

したがって求める確率は

$$\begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}), \\ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) & (n = 2m, m = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 12 分。奇数秒では確率 0 となる偶奇性と、下向き 3 部屋への 2 秒推移 $2/3, 1/6, 1/6$ が核心である。主解法は Q の確率そのもの、別解は P と Q の確率差を追う。いずれも、辺ではなく頂点だけで接する部屋へは移れないことを原図から読み取る必要がある。

【第 4 問】

座標平面上の放物線 C を $y = x^2 + 1$ で定める。 s, t は実数とし $t < 0$ を満たすとする。点 (s, t) から放物線 C へ引いた接線を l_1, l_2 とする。

(1) l_1, l_2 の方程式を求めよ。

(2) a を正の実数とする。放物線 C と直線 l_1, l_2 で囲まれる領域の面積が a となる (s, t) を全て求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

放物線 $y = x^2 + 1$ の $x = u$ における接線を媒介変数で表し、それが点 (s, t) を通る条件を u の 2 次方程式にする。 $t < 0$ なので 2 本の接線があり、接点の x 座標は $s - \alpha, s + \alpha$ と対称に書ける。面積は、放物線と接線の差が $(x - u)^2$ になること、および 2 本の接線の交点の x 座標が s であることを使い、左右に分けて積分する。最後に $S = 2\alpha^3/3 = a$ から α を決め、 $t = s^2 + 1 - \alpha^2 < 0$ を s の開区間条件に戻す。

【解答】

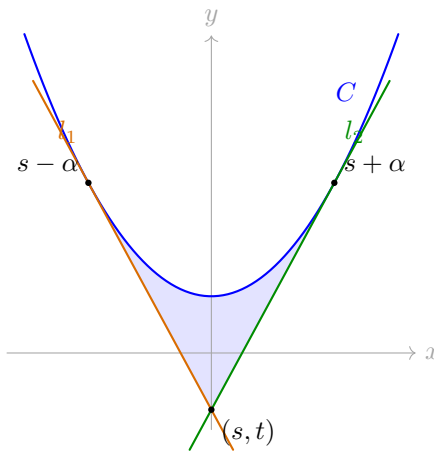
(1) 放物線 $C: y = x^2 + 1$ の $x = u$ における接線を求める。接点は $(u, u^2 + 1)$ 、接線の傾きは $2u$ であるから、接線の方程式は $y - (u^2 + 1) = 2u(x - u)$ すなわち $y = 2ux - u^2 + 1$ である。

この接線が点 (s, t) を通る条件は $t = 2us - u^2 + 1$ であり、これを u について整理すると $u^2 - 2su + t - 1 = 0$ である。判別式は $4s^2 - 4(t - 1) = 4(s^2 - t + 1)$ である。ここで $\alpha = \sqrt{s^2 - t + 1}$ とおく。 $t < 0$ より $s^2 - t + 1 > 0$ なので $\alpha > 0$ であり、2 つの接点の x 座標は $u = s - \alpha, v = s + \alpha$ である。

したがって 2 本の接線は、順序を除いて $y = 2(s - \alpha)x - (s - \alpha)^2 + 1$ と $y = 2(s + \alpha)x - (s + \alpha)^2 + 1$ である。ただし $\alpha = \sqrt{s^2 - t + 1}$ である。

(2) (1) の 2 つの接点の x 座標を $u = s - \alpha, v = s + \alpha$ とする。放物線と $x = u$ における接線との差は $x^2 + 1 - (2ux - u^2 + 1) = (x - u)^2$ である。同様に、 $x = v$ における接線との差は $(x - v)^2$ である。

接点が $s - \alpha, s + \alpha$ にあり、2 接線が $x = s$ で交わる配置を図示すると次のようになる。



また 2 本の接線の交点を求めると、 $2ux - u^2 + 1 = 2vx - v^2 + 1$ より $2(u - v)x = (u - v)(u + v)$ である。 $u \neq v$ だから $x = \frac{u + v}{2} = s$ である。

区間 $[u, s]$ では $x = u$ の接線が上側の接線であり、区間 $[s, v]$ では $x = v$ の接線が上側の接線である。よって囲まれる領域の面積 S は

$$S = \int_u^s (x - u)^2 dx + \int_s^v (x - v)^2 dx$$

である。ここで $u = s - \alpha, v = s + \alpha$ だから

$$S = \int_{s-\alpha}^s (x - s + \alpha)^2 dx + \int_s^{s+\alpha} (x - s - \alpha)^2 dx$$

であり、どちらの積分も $\alpha^3/3$ に等しい。したがって $S = \frac{2}{3}\alpha^3$ である。

この面積が a に等しいので $\frac{2}{3}\alpha^3 = a$ であり、 $\alpha > 0$ より $\alpha = \left(\frac{3a}{2}\right)^{1/3}$ である。一方、 $\alpha^2 = s^2 - t + 1$ だから $t = s^2 + 1 - \alpha^2$ である。条件 $t < 0$ は $s^2 < \alpha^2 - 1$ と同値である。

したがって、解が存在するには $\alpha^2 - 1 > 0$ すなわち $\alpha > 1$ が必要十分である。これは $\left(\frac{3a}{2}\right)^{1/3} > 1$ つまり $a > \frac{2}{3}$ と同値である。

よって $0 < a \leq 2/3$ のとき、条件を満たす (s, t) は存在しない。 $a > 2/3$ のとき、すべての解は

$$-\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{2/3} - 1} < s < \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{2/3} - 1}, \quad t = s^2 + 1 - \left(\frac{3a}{2}\right)^{2/3}$$

である。

▶ 解法 2 (接点間隔による面積公式)

【方針】

(1) は接点の x 座標を 2 次方程式の根として求める。(2) では接点を $p < q$ と一般に置き、放物線と 2 接線で囲まれる面積が接点間隔だけで $(q-p)^3/12$ と表せることを先に証明する。

【解答】

(1) 放物線 C の $x = u$ における接線は

$$y = 2ux - u^2 + 1$$

である。これが (s, t) を通る条件は

$$u^2 - 2su + t - 1 = 0.$$

$\alpha = \sqrt{s^2 - t + 1}$ とおけば、 $t < 0$ より $\alpha > 0$ であり、2 根は $s - \alpha, s + \alpha$ である。したがって 2 本の接線は

$$y = 2(s - \alpha)x - (s - \alpha)^2 + 1, \quad y = 2(s + \alpha)x - (s + \alpha)^2 + 1$$

である。

(2) 一般に、放物線 $y = x^2 + 1$ の $x = p, q$ ($p < q$) における接線を考える。2 接線の交点の x 座標は $(p+q)/2$ であり、放物線と $x = p$ における接線との差は $(x-p)^2$ 、 $x = q$ における接線との差は $(x-q)^2$ である。よって囲まれる面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_p^{(p+q)/2} (x-p)^2 dx + \int_{(p+q)/2}^q (x-q)^2 dx \\ &= \frac{(q-p)^3}{24} + \frac{(q-p)^3}{24} = \frac{(q-p)^3}{12}. \end{aligned}$$

本問では $p = s - \alpha, q = s + \alpha$ だから

$$S = \frac{(2\alpha)^3}{12} = \frac{2}{3}\alpha^3.$$

$S = a$ より

$$\alpha = \left(\frac{3a}{2}\right)^{1/3}, \quad t = s^2 + 1 - \left(\frac{3a}{2}\right)^{2/3}.$$

さらに $t < 0$ は

$$s^2 < \left(\frac{3a}{2}\right)^{2/3} - 1$$

と同値である。したがって $0 < a \leq 2/3$ では解は存在しない。 $a > 2/3$ では

$$-\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{2/3} - 1} < s < \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{2/3} - 1}, \quad t = s^2 + 1 - \left(\frac{3a}{2}\right)^{2/3}$$

がすべての解である。

【総評】 難度 7、目安時間 18 分。接点を媒介変数で置くこと、放物線と接線の差が完全平方になること、最後の $t < 0$ を $a > 2/3$ と s の開区間へ戻すことが核心である。別解では面積を接点間隔 $(q-p)^3/12$ の一般公式として独立に導く。