

東京大学 2012 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り、 D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また、 L が最大値をとるとき、 x 軸と l のなす角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) の余弦 $\cos \theta$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

原点を通る直線を、 x 軸となす角 θ と原点からの距離 r で表す。円 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ との交点は $r = 0$ と $r = 2 \sin \theta$ であり、半平面 $x \geq \sqrt{2}/3$ は直線上で $r \geq \sqrt{2}/(3 \cos \theta)$ という下限を与える。したがって共通部分の長さを $L(\theta)$ として書き、存在条件の境界では $L = 0$ になることを確認したうえで内部の停留点を求める。停留条件は $u = \cos^2 \theta$ に直して解く。

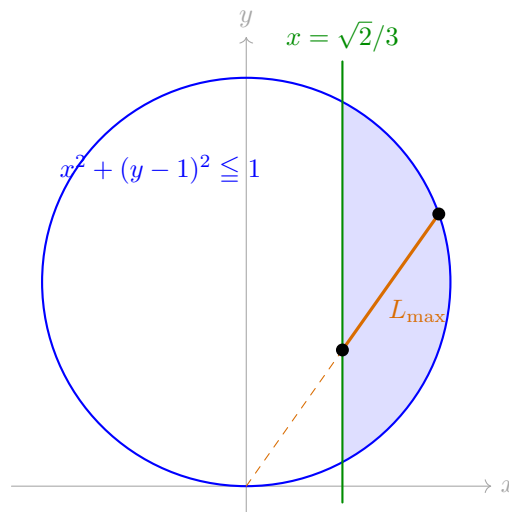
【解答】

直線 l は原点を通り、領域 D との共通部分が第 1 象限側の線分になる。 l と x 軸のなす角を θ とし、直線上の点を原点からの距離 r を用いて $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ($r \geq 0, 0 < \theta < \pi/2$) と表す。

まず円 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ に代入すると $r^2 \cos^2 \theta + (r \sin \theta - 1)^2 = 1$ である。展開すると $r^2 - 2r \sin \theta = 0$ すなわち $r(r - 2 \sin \theta) = 0$ となる。したがって円の内部にある直線上の部分は $0 \leq r \leq 2 \sin \theta$ である。

次に半平面条件 $x \geq \sqrt{2}/3$ は $r \cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$ であり、 $\cos \theta > 0$ だから $r \geq \frac{\sqrt{2}}{3 \cos \theta}$ となる。よって共通部分が線分として存在するとき、その長さは $L(\theta) = 2 \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{3 \cos \theta}$ である。

円板を直線 $x = \sqrt{2}/3$ で切った青色部分が D であり、橙色の線分が最大時の共通部分である。



存在条件の境界では右辺が 0 になり、最大は内部で起こる。

微分すると $L'(\theta) = 2 \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$ である。内部の最大点では $L'(\theta) = 0$ なので $2 \cos^3 \theta = \frac{\sqrt{2}}{3} \sin \theta$ である。両辺は正であるから、平方してよい。 $u = \cos^2 \theta$ とおくと $0 < u < 1$ 、 $\sin^2 \theta = 1 - u$ であり、 $4u^3 = \frac{2}{9}(1 - u)$ すなわち $18u^3 + u - 1 = 0$ を得る。左辺は $18u^3 + u - 1 = (3u - 1)(6u^2 + 2u + 1)$ と因数分解でき、 $6u^2 + 2u + 1 > 0$ であるから $u = \frac{1}{3}$ である。したがって $\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$ であり、 $0 < \theta < \pi/2$ より $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

このとき $\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ であるから

$$L_{\max} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。

▶ 解法 2 (直線の傾きによる最大化)

【方針】

直線を $y = kx$ ($k > 0$) と置く。円との第 1 象限側の交点と $x = \sqrt{2}/3$ との交点を x 座標で求め、2 点間距離を k の関数にする。

【解答】

直線 l を

$$y = kx \quad (k > 0)$$

と置く。円との交点は

$$x^2 + (kx - 1)^2 = 1$$

を満たすから

$$x\{(1 + k^2)x - 2k\} = 0.$$

第 1 象限側の交点の x 座標は

$$X = \frac{2k}{1 + k^2}$$

である。一方、直線 $x = \sqrt{2}/3$ との交点の x 座標は $\sqrt{2}/3$ である。直線上では x 座標の差を $\sqrt{1 + k^2}$ 倍したものが距離なので、

$$L(k) = \sqrt{1 + k^2} \left(\frac{2k}{1 + k^2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{2k}{\sqrt{1 + k^2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{1 + k^2}.$$

微分すると

$$L'(k) = \frac{2}{(1 + k^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

したがって $L'(k) = 0$ は

$$k(1 + k^2) = 3\sqrt{2}$$

と同値である。左辺は $k > 0$ で単調増加し、 $k = \sqrt{2}$ がこの方程式を満たすので、ここで唯一の最大値をとる。よって

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であり、

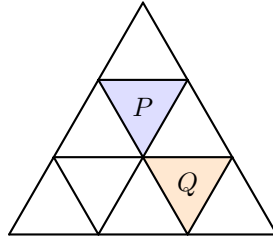
$$L_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 10 分。円が原点を通るため、主解法の極座標表示では円上の距離が $2 \sin \theta$ と直ちに出る。別解は直線 $y = kx$ の 2 交点間距離を直接最大化する。いずれも、円による上端と $x = \sqrt{2}/3$ による下端を正しい順で差し引くことが採点上の中心となる。

【第 2 問】

図のように、正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り、部屋 P , Q を定める。



1 つの球が部屋 P を出発し、1 秒ごとに、そのままその部屋にとどまることなく、辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

図の小三角形は上向きと下向きが交互に隣接しているの、下向きの部屋 P から出発すると奇数秒後には必ず上向きの部屋にいる。したがって Q に到達できるのは偶数秒後だけである。偶数秒だけを見れば、下向きの 3 部屋 P, R, Q の間の 2 秒ごとの移動に圧縮できる。図から、任意の下向き部屋から 2 秒後に同じ部屋へ戻る確率は $2/3$ 、他の 2 つの下向き部屋へ移る確率はそれぞれ $1/6$ である。対称性により P 以外の 2 部屋の確率を同じ文字で置き、1 次漸化式を解く。

【解答】

図の下向きの小三角形は 3 つあり、出発点を P 、到着点を Q 、残り 1 つを R と呼ぶことにする。

1 秒ごとに辺を共有する隣の部屋へ移るので、下向きの部屋から 1 秒後には上向きの部屋へ、上向きの部屋から 1 秒後には下向きの部屋へ移る。したがって、下向きの部屋 P から出発した球は、奇数秒後には上向きの部屋にいる。よって奇数 n については、 n 秒後に下向きの部屋 Q にいる確率は 0 である。

次に偶数秒後を考える。下向きの 1 つの部屋から出発して 2 秒後にどの下向き部屋にいるかを調べる。図を見ると、どの下向き部屋にも 3 つの隣室がある。そのうち 1 つは外側の隅にある上向き部屋で、そこからは元の下向き部屋へ戻るしかない。残り 2 つの上向き部屋は、それぞれ元の下向き部屋と他の下向き部屋 1 つに辺で接している。

したがって、たとえば P から出発したとき、2 秒後に P へ戻る確率は $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ である。また、2 秒後に R へ移る確率と Q へ移る確率はいずれも $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ である。同じ関係は R, Q から出発しても成り立つ。 $2m$ 秒後に Q にいる確率を q_m とする。図は R と Q について対称なので、 $2m$ 秒後に R にいる確率も q_m である。したがって P にいる確率は $1 - 2q_m$ である。

次の 2 秒で Q にいる確率を考えると、 P から Q へ移る確率は $1/6$ 、 R から Q へ移る確率も $1/6$ 、 Q から Q へ戻る確率は $2/3$ であるから $q_{m+1} = \frac{1}{6}(1 - 2q_m) + \frac{1}{6}q_m + \frac{2}{3}q_m$ である。右辺を整理して $q_{m+1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q_m$ を得る。また、出発時には Q にいないので $q_0 = 0$ である。

この漸化式の一定値を求めると、 $q = 1/6 + (1/2)q$ より $q = 1/3$ である。したがって $q_{m+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(q_m - \frac{1}{3})$ であり、 $q_0 = 0$ から $q_m - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^m$ となる。よって $q_m = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2^m})$ である。

以上より、求める確率は

$$\begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}), \\ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) & (n = 2m, m = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2 (確率差の漸化式)

【方針】

奇数秒後の確率が 0 であることを先に分ける。偶数秒後だけを見て、 P にいる確率を p_m 、残る 2 つの下向き部屋にいる確率をそれぞれ q_m とする。2 秒推移から $p_m - q_m$ が毎回 $1/2$ 倍になることを示し、全確率 $p_m + 2q_m = 1$ と連立する。

【解答】

下向きの 3 部屋を P, R, Q とする。下向きの部屋から 1 秒後には上向きの部屋へ移り、上向きの部屋から 1 秒後には下向きの部屋へ移る。したがって、奇数秒後に下向きの部屋 Q にいる確率は 0 である。

以下、 $2m$ 秒後だけを考える。図の対称性により、 $2m$ 秒後に P にいる確率を p_m 、 R, Q にいる確率をそれぞれ q_m と書ける。明らかに

$$p_m + 2q_m = 1 \quad (1)$$

である。

どの下向き部屋から出ても、2 秒後に同じ部屋へ戻る確率は $2/3$ 、他の各下向き部屋へ移る確率は $1/6$ である。よって

$$\begin{aligned} p_{m+1} &= \frac{2}{3}p_m + \frac{1}{6}q_m + \frac{1}{6}q_m, \\ q_{m+1} &= \frac{1}{6}p_m + \frac{1}{6}q_m + \frac{2}{3}q_m \end{aligned}$$

となる。2 式の差をとると

$$p_{m+1} - q_{m+1} = \frac{1}{2}(p_m - q_m).$$

初期状態は $p_0 = 1, q_0 = 0$ だから

$$p_m - q_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m. \quad (2)$$

(1)、(2) から $1 - 3q_m = 2^{-m}$ であり、

$$q_m = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^m}\right).$$

したがって求める確率は

$$\begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}), \\ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) & (n = 2m, m = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 12 分。奇数秒では確率 0 となる偶奇性と、下向き 3 部屋への 2 秒推移 $2/3, 1/6, 1/6$ が核心である。主解法は Q の確率そのもの、別解は P と Q の確率差を追う。いずれも、辺ではなく頂点だけで接する部屋へは移れないことを原図から読み取る必要がある。

【第 3 問】

座標平面上で 2 つの不等式

$$y \geq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする。 S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし、 y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

- (1) V_1 と V_2 の値を求めよ。
- (2) $\frac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず放物線と楕円上半分の交点を求め、領域 S を $-1/2 \leq x \leq 1/2$ で上下の関数にはさまれた領域として表す。 x 軸回転では外半径が楕円上半分、内半径が放物線なので、円板の差を積分する。 y 軸回転では、領域が y 軸対称であることを使って $x \geq 0$ 側の縦の細片を回転する円筒殻で積分する。最後に V_2/V_1 を整理し、両辺が正であることを確認して平方比較により 1 との大小を判定する。

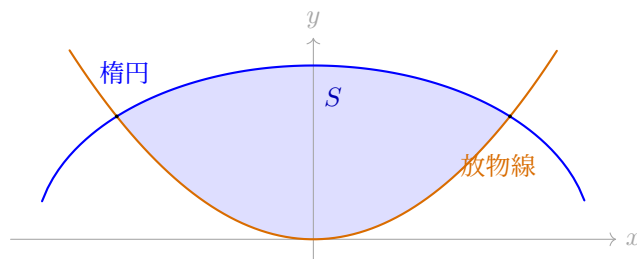
【解答】

(1) まず 2 つの境界の交点を求める。放物線 $y = x^2/2$ を楕円 $\frac{x^2}{4} + 4y^2 = \frac{1}{8}$ に代入すると $\frac{x^2}{4} + 4\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$ すなわち $\frac{x^2}{4} + x^4 = \frac{1}{8}$ である。 $X = x^2$ とおくと $8X^2 + 2X - 1 = 0$ となり、 $(4X - 1)(2X + 1) = 0$ である。 $X \geq 0$ だから $X = 1/4$ 、すなわち $x = \pm \frac{1}{2}$ で交わる。

楕円の上半分は $4y^2 = \frac{1}{8} - \frac{x^2}{4} = \frac{1-2x^2}{8}$ より $y = \frac{\sqrt{1-2x^2}}{4\sqrt{2}}$ である。したがって領域 S は

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{x^2}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{1-2x^2}}{4\sqrt{2}}$$

領域 S は放物線の上側かつ楕円の内側にある青色部分で、交点の x 座標は $\pm 1/2$ である。



で表される。 x 軸のまわりに回転すると、外半径は $\sqrt{1-2x^2}/(4\sqrt{2})$ 、内半径は $x^2/2$ である。よって

$$V_1 = \pi \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ \left(\frac{\sqrt{1-2x^2}}{4\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \right\} dx$$

である。被積分関数を整理すると

$$\left(\frac{\sqrt{1-2x^2}}{4\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 = \frac{1-2x^2}{32} - \frac{x^4}{4}$$

なので

$$V_1 = \pi \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{32} - \frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{4} \right) dx$$

である。偶関数であることを用いて計算すると

$$V_1 = 2\pi \left[\frac{x}{32} - \frac{x^3}{48} - \frac{x^5}{20} \right]_0^{1/2} = \frac{11\pi}{480}$$

である。

次に y 軸のまわりに回転する体積を求める。 S は y 軸対称なので、 $0 \leq x \leq 1/2$ の部分を円筒殻で回転すればよい。半径は x 、高さは $\frac{\sqrt{1-2x^2}}{4\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2}$ であるから

$$V_2 = 2\pi \int_0^{1/2} x \left(\frac{\sqrt{1-2x^2}}{4\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

である。ここで

$$\int x \frac{\sqrt{1-2x^2}}{4\sqrt{2}} dx = -\frac{(1-2x^2)^{3/2}}{24\sqrt{2}}, \quad \int \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^4}{8}$$

だから

$$V_2 = 2\pi \left[-\frac{(1-2x^2)^{3/2}}{24\sqrt{2}} - \frac{x^4}{8} \right]_0^{1/2}$$

である。代入して整理すると $V_2 = \frac{(8\sqrt{2}-7)\pi}{192}$ である。

(2) (1) より

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(8\sqrt{2}-7)\pi}{192} \cdot \frac{480}{11\pi} = \frac{40\sqrt{2}-35}{22}$$

である。これが 1 より小さいかどうかは $40\sqrt{2}-35 < 22$ すなわち $40\sqrt{2} < 57$ と同値である。両辺は正であり、平方すると $(40\sqrt{2})^2 = 3200$, $57^2 = 3249$ であるから $40\sqrt{2} < 57$ が成り立つ。したがって $\frac{V_2}{V_1} < 1$ である。

▶ 解法 2 (水平断面による 2 体積の統一計算)

【方針】

領域を高さ y ごとの水平断面で見る。放物線側の半幅 $\sqrt{2y}$ と楕円側の半幅 $\sqrt{1/2-16y^2}$ が $y = 1/8$ で入れ替わる。 x 軸回転は円筒殻、 y 軸回転は円板として同じ区分で積分する。

【解答】

(1) 高さ y における領域の半幅を $r(y)$ とする。放物線から $x^2 \leq 2y$ 、楕円から $x^2 \leq 1/2-16y^2$ を得る。2 つの上限が等しくなる正の高さは

$$2y = \frac{1}{2} - 16y^2$$

より $y = 1/8$ である。また領域の最高点は $y = 1/(4\sqrt{2})$ である。したがって

$$r(y) = \begin{cases} \sqrt{2y} & (0 \leq y \leq 1/8), \\ \sqrt{1/2-16y^2} & (1/8 \leq y \leq 1/(4\sqrt{2})). \end{cases}$$

x 軸のまわりには、半径 y 、高さ $2r(y)$ の円筒殻を回すと考えられる。よって

$$\begin{aligned} V_1 &= 4\pi \left\{ \int_0^{1/8} y\sqrt{2y} dy + \int_{1/8}^{1/(4\sqrt{2})} y\sqrt{\frac{1}{2}-16y^2} dy \right\} \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{320} + \frac{1}{384} \right) = \frac{11\pi}{480}. \end{aligned}$$

y 軸のまわりには、半径 $r(y)$ の円板を積み重ねればよい。したがって

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \left\{ \int_0^{1/8} 2y dy + \int_{1/8}^{1/(4\sqrt{2})} \left(\frac{1}{2} - 16y^2 \right) dy \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{64} + \left[\frac{y}{2} - \frac{16}{3}y^3 \right]_{1/8}^{1/(4\sqrt{2})} \right\} \\ &= \frac{(8\sqrt{2}-7)\pi}{192}. \end{aligned}$$

(2) よって

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{40\sqrt{2}-35}{22}.$$

両辺が正であることに注意すると、

$$40\sqrt{2} < 57 \iff 3200 < 3249$$

だから

$$\frac{V_2}{V_1} < 1$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 18 分。主解法は x 軸回転を円板差、 y 軸回転を円筒殻で処理する。別解は水平断面の半幅が $y = 1/8$ で入れ替わることを見抜き、2 体積を同じ区分で計算する。交点、根号の係数、回転軸ごとの半径を図と対応させることが重要である。

【第 4 問】

n を 2 以上の整数とする。自然数 (1 以上の整数) の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

- (1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。
- (2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

【方針】

(1) は連続する 2 整数が互いに素であることを使う。互いに素な 2 数の積が n 乗数なら、それぞれの素因数の指数が n の倍数になるため、各因数自身も n 乗数である。しかし正の n 乗数が 1 だけ違うことはない。(2) は背理法で、連続する n 個の積を a^n とおく。積の大きさから $k < a < k + n - 1$ を導き、 $a + 1$ がその連続する n 個の中に含まれることを利用する。 $a + 1$ の素因数は左辺の積を割るので a^n を割り、結局 a も割ることになって互いに素性に矛盾する。

【解答】

(1) 連続する 2 個の自然数を $k, k + 1$ とする。この 2 数は互いに素である。

仮に $k(k + 1) = a^n$ となる自然数 a が存在するとする。 k と $k + 1$ は互いに素なので、素因数分解において k に現れる素数と $k + 1$ に現れる素数は重ならない。積 $k(k + 1)$ が n 乗数なら、各素数の指数はすべて n の倍数であるから、 k と $k + 1$ はそれぞれ n 乗数でなければならない。

したがって $k = u^n, k + 1 = v^n$ と書ける。すると $v > u \geq 1$ であり、 $v^n - u^n \geq (u + 1)^n - u^n$ である。 $n \geq 2$ だから $(u + 1)^n - u^n > 1$ である。一方、 $v^n - u^n = (k + 1) - k = 1$ なので矛盾する。よって連続する 2 個の自然数の積は n 乗数ではない。

(2) $n = 2$ のときは (1) そのものである。以下では $n \geq 3$ とする。

連続する n 個の自然数を $k, k + 1, \dots, k + n - 1$ とし、その積が n 乗数であると仮定する。すなわち $k(k + 1) \cdots (k + n - 1) = a^n$ となる自然数 a が存在するとする。

左辺の各因数は k 以上であり、しかも $k + 1$ 以上の因数も含むので $k^n < a^n$ である。したがって $k < a$ である。また、各因数は $k + n - 1$ 以下であり、しかも $k + n - 2$ 以下の因数も含むので $a^n < (k + n - 1)^n$ である。したがって $a < k + n - 1$ である。以上より $k < a < k + n - 1$ を得る。 a は整数で $n \geq 3$ だから $k + 1 \leq a \leq k + n - 2$ である。よって $a + 1 \in \{k, k + 1, \dots, k + n - 1\}$ である。

ここで $a + 1 > 1$ なので、 $a + 1$ はある素数 p で割り切れる。この $a + 1$ は左辺の因数の 1 つであるから、 p は左辺 $k(k + 1) \cdots (k + n - 1)$ を割る。ところが左辺は a^n に等しいので、 p は a^n を割り、したがって a を割る。

一方、 p は $a + 1$ も割るので、 p は $(a + 1) - a = 1$ を割ることになる。これは素数 p について不可能である。よって仮定は誤りであり、連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

【総評】 難度 6、目安時間 14 分。計算は少ないが、整数論証の組み立てが必要な問題である。(1) では互いに素な因数の積が n 乗数なら各因数も n 乗数になる、という素因数分解の根拠を省略しすぎないこと。(2) では a^n と置いた後、大小評価から $k < a < k + n - 1$ を作るのが決定打で、そこから $a + 1$ が連続する因数の中に現れる。最後の素数 p による矛盾は短い、 $p \mid a^n \Rightarrow p \mid a$ まで明記したい。

【第 5 問】

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする。

(D) A の成分 a, b, c, d は整数である。また、平面上の 4 点 $(0, 0), (a, b), (a + c, b + d), (c, d)$ は、面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ。

(2) $c = 0$ ならば、 A に B, B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより、4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3) $|a| \geq |c| > 0$ とする。 $BA, B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は、それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x| + |z| < |a| + |c|$$

を満たすことを示せ。

【方針】

条件 (D) は、2 つの辺ベクトル $(a, b), (c, d)$ が作る平行四辺形の面積が 1 であることなので、成分が整数かつ $|ad - bc| = 1$ と言い換えられる。(1) は左から B, B^{-1} をかけた行列を直接計算し、整数性と行列式の絶対値が保たれることを示す。(2) は $c = 0$ から $a, d = \pm 1$ を得て、 B^k を左からかける操作が右上成分を $b + kd$ に変えることを使う。(3) は第 1 列だけを見て、 a, c の符号に応じて $a + c$ または $a - c$ の絶対値を小さくする。

【解答】

(1) 4 点 $(0, 0), (a, b), (a + c, b + d), (c, d)$ が作る平行四辺形の 2 つの辺ベクトルは $(a, b), (c, d)$ である。したがってその面積は $|ad - bc|$ である。よって条件 (D) は、成分が整数であり、かつ $|ad - bc| = 1$ であることと同値である。 B^{-1} は

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。直接計算すると

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{pmatrix}$$

であり、

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ c & d \end{pmatrix}$$

である。どちらも成分は整数である。

また $(a + c)d - (b + d)c = ad - bc$ であり、 $(a - c)d - (b - d)c = ad - bc$ である。したがってどちらの行列でも $|ad - bc|$ に対応する値は 1 のまま保たれる。よって BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たす。

(2) $c = 0$ とする。このとき条件 (D) より $|ad - bc| = |ad| = 1$ である。 a, d は整数なので $a = \pm 1, d = \pm 1$ である。整数 k に対して

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。 $k > 0$ なら B を k 回、 $k < 0$ なら B^{-1} を $-k$ 回左からかけることで $B^k A$ が得られる。いま

$$B^k A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + kd \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

である。 $d = \pm 1$ なので $k = -bd$ と選べば k は整数であり、 $b + kd = b - bd^2 = 0$ となる。したがって

$$B^k A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

にできる。ここで a, d はそれぞれ ± 1 だから、得られる行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のいずれかである。

(3)

$$BA = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B^{-1}A = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$$

である。問題の不等式は第 1 列だけに関係するので、 $|a+c|+|c|$ と $|a-c|+|c|$ を比べればよい。

まず a と c が同符号のときを考える。このとき $|a| \geq |c| > 0$ より $|a-c| = |a|-|c|$ である。したがって $B^{-1}A$ について $|x|+|z| = |a-c|+|c| = |a| < |a|+|c|$ となる。

次に a と c が異符号のときを考える。このとき $|a+c| = |a|-|c|$ である。したがって BA について $|x|+|z| = |a+c|+|c| = |a| < |a|+|c|$ となる。

以上より、 BA 、 $B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は $|x|+|z| < |a|+|c|$ を満たす。

【総評】 難度 6、目安時間 16 分。旧課程の行列問題だが、実質は整数成分の行基本操作と面積保存である。条件 (D) を $|ad-bc|=1$ に翻訳するところが入口で、以後は左から B 、 B^{-1} をかけると第 1 行が第 1 行 $\pm$ 第 2 行に変わることを追えばよい。(2) では B^k が反復操作で実現できること、(3) では第 1 列の絶対値和だけを下げればよいことを明確に書くと、誘導の意図が伝わる。

【第 6 問】

2×2 行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$\text{Tr}(P) = p + s$$

と定める。

a, b, c は $a \geq b > 0$, $0 \leq c \leq 1$ を満たす実数とする。行列 A, B, C, D を次で定める。

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また実数 x に対し

$$U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

とする。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 各実数 t に対して、 x の関数

$$f(x) = \text{Tr} \left((U(t)AU(-t) - B)U(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U(-x) \right)$$

の最大値 $m(t)$ を求めよ。(ただし、最大値をとる x を求める必要はない。)

(2) すべての実数 t に対し

$$2\text{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geq \text{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$$

が成り立つことを示せ。

【方針】

$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおき、 $U(y)JU(-y)$ を直接計算して $\cos 2y, \sin 2y$ の行列にする。 A, B は平均部分と差の部分に分けると、平均部分が打ち消えて $U(t)AU(-t) - B$ は J 型の行列だけで表せる。これにより $f(x)$ は $2(a-b)\cos t \cos(t-2x)$ となり、最大値は絶対値で決まる。(2) は両辺を直接計算し、 $u = |\cos t|$ と置いて 1 変数不等式に直す。最後は $a^c b^{1-c} \geq b$ 、 $b^c a^{1-c} \geq b$ を使って括弧内が非負であることを示す。

【解答】

(1)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく。まず $U(y)JU(-y)$ を直接計算する。 $U(-y) = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$ なので

$$U(y)JU(-y) = \begin{pmatrix} \cos 2y & \sin 2y \\ \sin 2y & -\cos 2y \end{pmatrix}$$

である。

また

$$A = \frac{a+b}{2}I + \frac{a-b}{2}J, \quad B = \frac{a+b}{2}I - \frac{a-b}{2}J$$

である。ただし I は 2 次単位行列である。 $U(t)IU(-t) = I$ だから $U(t)AU(-t) - B = \frac{a-b}{2}\{U(t)JU(-t) + J\}$ である。

したがって $f(x) = \frac{a-b}{2} \text{Tr}\{U(t)JU(-t) + J\}U(x)JU(-x)$ である。ここで上の表示から $\text{Tr}\{U(t)JU(-t)U(x)JU(-x)\} = 2\cos(2t-2x)$ であり、また $\text{Tr}\{JU(x)JU(-x)\} = 2\cos 2x$ である。よって $f(x) = (a-b)\{\cos(2t-2x) + \cos 2x\}$ となる。和積公式より $\cos(2t-2x) + \cos 2x = 2\cos t \cos(t-2x)$ だから $f(x) = 2(a-b)\cos t \cos(t-2x)$ である。 x が実数全体を動くとき、 $\cos(t-2x)$ は -1 から 1 までの値をとる。また $a \geq b$ なので $a-b \geq 0$ である。したがって最大値は $m(t) = 2(a-b)|\cos t|$ である。

(2) まず、跡 Tr は対角成分の和なので $\text{Tr}(U(t)AU(-t)) = \text{Tr}(A) = a+b$ である。したがって $\text{Tr}(U(t)AU(-t) + B) = 2(a+b)$ である。

次に $\text{Tr}(U(t)CU(-t)D)$ を計算する。 C は対角行列なので、 $U(t)CU(-t)$ の対角成分は $a^c \cos^2 t + b^c \sin^2 t$ 、 $a^c \sin^2 t + b^c \cos^2 t$ である。 $D = \begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$ を右からかけた行列の対角成分の和をとると

$$\begin{aligned} \text{Tr}(U(t)CU(-t)D) &= b^{1-c}(a^c \cos^2 t + b^c \sin^2 t) \\ &\quad + a^{1-c}(a^c \sin^2 t + b^c \cos^2 t) \\ &= (a^c b^{1-c} + b^c a^{1-c}) \cos^2 t + (a+b) \sin^2 t \end{aligned}$$

である。

(1) より $m(t) = 2(a-b)|\cos t|$ であるから、示すべき不等式は $2\{(a^c b^{1-c} + b^c a^{1-c}) \cos^2 t + (a+b) \sin^2 t\} \geq 2(a+b) - 2(a-b)|\cos t|$ と同値である。両辺を 2 で割り、 $u = |\cos t|$ ($0 \leq u \leq 1$) とおくと、 $\cos^2 t = u^2$ 、 $\sin^2 t = 1 - u^2$ だから $(a^c b^{1-c} + b^c a^{1-c})u^2 + (a+b)(1-u^2) \geq (a+b) - (a-b)u$ を示せばよい。左辺から右辺を引くと $u\{(a-b) + u(a^c b^{1-c} + b^c a^{1-c} - a - b)\}$ である。

ここで $X = a^c b^{1-c} + b^c a^{1-c} - a - b$ とおく。 $a \geq b > 0$ 、 $0 \leq c \leq 1$ より $a^c b^{1-c} = b\left(\frac{a}{b}\right)^c \geq b$ であり、同様に $b^c a^{1-c} = b\left(\frac{a}{b}\right)^{1-c} \geq b$ である。 $X \geq 0$ のときは $(a-b) + uX \geq a-b \geq 0$ である。 $X < 0$ のときは、 $0 \leq u \leq 1$ だから $uX \geq X$ であり、 $(a-b) + uX \geq (a-b) + X$ である。右辺は $(a-b) + X = a^c b^{1-c} + b^c a^{1-c} - 2b$ であり、上で示した 2 つの不等式からこれは 0 以上である。

したがって、どちらの場合も $(a-b) + uX \geq 0$ である。さらに $u \geq 0$ だから $u\{(a-b) + uX\} \geq 0$ となる。よって、すべての実数 t に対して $2\text{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geq \text{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$ が成り立つ。

【総評】 難度 8、目安時間 25 分以上。行列計算と三角関数整理が長く、理系最終問らしく処理量が多い。方針は、抽象的な線形代数に寄せず、 J と $U(y)JU(-y)$ を直接計算して問題の形に合わせる。 (1) では $f(x) = 2(a-b)\cos t \cos(t-2x)$

まで落とせるか、(2) では $u = |\cos t|$ によって不等式を $u\{(a-b) + uX\} \geq 0$ に整理できるかが採点上の大きな分岐になる。最後の非負性は $a^c b^{1-c} \geq b$ 、 $b^c a^{1-c} \geq b$ を根拠として、場合分けを省かず書くとよい。