

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 2013 年 度 文 系

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

関数 $y = x(x-1)(x-3)$ のグラフを C ，原点 O を通る傾き t の直線を l とし， C と l が O 以外に共有点をもつとする。 C と l の共有点を O, P, Q とし， $|\overrightarrow{OP}|$ と $|\overrightarrow{OQ}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合は， O, P, Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ。

第 2 問

座標平面上の 3 点

$$P(0, -\sqrt{2}), \quad Q(0, \sqrt{2}), \quad A(a, \sqrt{a^2+1}) \quad (0 \leq a \leq 1)$$

を考える。

- (1) 2つの線分の長さの差 $PA - AQ$ は a によらない定数であることを示し、その値を求めよ。
- (2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y = 2$ へ下ろした垂線と直線 $y = 2$ との交点を C とする。このとき、線分の長さの和

$$PA + AB + BC$$

は a によらない定数であることを示し、その値を求めよ。

第 3 問

a, b を実数の定数とする。実数 x, y が

$$x^2 + y^2 \leq 25, \quad 2x + y \leq 5$$

をともに満たすとき、 $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$ の最小値を求めよ。

第 4 問

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり、最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

- (i) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば A に 1 点を与え、コインは A がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、 A はコインを B に渡す。
- (ii) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば B に 1 点を与え、コインは B がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、 B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で、2 点を獲得した方の勝利とする。 A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)