

東京大学 2013 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

関数 $y = x(x-1)(x-3)$ のグラフを C ，原点 O を通る傾き t の直線を l とし， C と l が O 以外に共有点をもつとする。 C と l の共有点を O ， P ， Q とし， $|\overrightarrow{OP}|$ と $|\overrightarrow{OQ}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合は， O ， P ， Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ。

【方針】

直線 $l: y = tx$ を 3 次曲線へ代入し，原点以外の共有点の x 座標を二次方程式の 2 解 α, β として扱う。まず判別式から定義域 $t \geq -1$ を確定する。直線上の点までの距離には共通因子 $\sqrt{1+t^2}$ があるので，解と係数の関係 $\alpha\beta = 3-t$ によって $g(t) = |3-t|(1+t^2)$ まで落とす。最後に絶対値が外れる $t = 3$ と，各区間の停留点・端点を同じ増減表に整理して，極大・極小を漏れなく判定する。

【解答】

直線 l は $y = tx$ である。曲線 C との共有点の x 座標は $x(x-1)(x-3) = tx$ を満たす。整理すると $x\{x^2 - 4x + 3 - t\} = 0$ である。 $x = 0$ が原点 O に対応する。原点以外の共有点の x 座標は $x^2 - 4x + 3 - t = 0$ の解である。この二次方程式が実数解をもつための条件は $16 - 4(3-t) = 4(1+t) \geq 0$ であるから $t \geq -1$ である。

原点以外の 2 つの共有点の x 座標を α, β とする。接する場合や一方が原点と一致する場合も，重複を込めてこの 2 解で扱う。解と係数の関係より $\alpha\beta = 3-t$ である。直線 $y = tx$ 上の点 (x, tx) の原点からの距離は $\sqrt{x^2 + t^2x^2} = |x|\sqrt{1+t^2}$ であるから， $g(t) = |\alpha|\sqrt{1+t^2} \cdot |\beta|\sqrt{1+t^2} = |3-t|(1+t^2)$ である。

したがって

$$g(t) = \begin{cases} (3-t)(1+t^2) & (-1 \leq t \leq 3), \\ (t-3)(1+t^2) & (3 \leq t) \end{cases}$$

である。 $-1 \leq t \leq 3$ では $g'(t) = -(1+t^2) + 2t(3-t) = -3t^2 + 6t - 1$ であり， $g'(t) = 0$ となるのは $t = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ である。こ

こで $u = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $v = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$ とおくと， $-1 < u < v < 3$ である。 $3 \leq t$ では $g'(t) = (1+t^2) + 2t(t-3) = 3t^2 - 6t + 1$ であり， $t \geq 3$ では $3t^2 - 6t + 1 = 3(t-1)^2 - 2 > 0$ である。

以上より， $g(t)$ は

$[-1, u]$ で減少， $[u, v]$ で増加， $[v, 3]$ で減少， $[3, \infty)$ で増加

である。したがって極小値は $t = u$ と $t = 3$ でとり， $g(u) = 4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}$ ， $g(3) = 0$ である。また極大値は $t = v$ でとり，

$g(v) = 4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}$ である。

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。3 次曲線と直線の交点を個別に求めず，原点を除いた二次方程式の 2 解の積だけを使うのが中心である。採点上は，共有点が存在する定義域 $t \geq -1$ 、距離の積に絶対値が付く理由、 $t = 3$ で式を分けることの 3 点を明記したい。 $t = 3$ では原点が重複して $g(3) = 0$ となる。また，定義域の端 $t = -1$ は局所的な極値とは数えず，内部の符号変化から極値を答える点にも注意する。

【第 2 問】

座標平面上の 3 点

$$P(0, -\sqrt{2}), \quad Q(0, \sqrt{2}), \quad A(a, \sqrt{a^2 + 1}) \quad (0 \leq a \leq 1)$$

を考える。

(1) 2 つの線分の長さの差 $PA - AQ$ は a によらない定数であることを示し、その値を求めよ。

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y = 2$ へ下ろした垂線と直線 $y = 2$ との交点を C とする。このとき、線分の長さの和

$$PA + AB + BC$$

は a によらない定数であることを示し、その値を求めよ。

【方針】

(1) は $s = \sqrt{a^2 + 1}$ とおき、 $a^2 = s^2 - 1$ を使って PA^2, AQ^2 を完全平方にする。(2) は放物線を $x^2 = 4\sqrt{2}y$ と見て、焦点が Q 、準線が $y = -\sqrt{2}$ であることを使う。ただし $AB = QB - AQ$ と $BC = 2 - y_B$ を使うには、 Q, A, B の順序と $y_B < 2$ の確認が必要である。半直線を $Q + \lambda(A - Q)$ と表し、放物線との交点が $\lambda > 1$ にただ 1 つあることを示してから、焦点距離と準線までの距離をつなぐ。

【解答】

(1)

$$s = \sqrt{a^2 + 1}$$

とおく。 $0 \leq a \leq 1$ より $1 \leq s \leq \sqrt{2}$ であり、 $a^2 = s^2 - 1$ である。点 A は (a, s) なので

$$\begin{aligned} PA^2 &= a^2 + (s + \sqrt{2})^2 \\ &= s^2 - 1 + s^2 + 2\sqrt{2}s + 2 \\ &= (\sqrt{2}s + 1)^2, \\ AQ^2 &= a^2 + (s - \sqrt{2})^2 \\ &= s^2 - 1 + s^2 - 2\sqrt{2}s + 2 \\ &= (\sqrt{2}s - 1)^2 \end{aligned}$$

である。 $\sqrt{2}s - 1 > 0$ だから

$$PA = \sqrt{2}s + 1, \quad AQ = \sqrt{2}s - 1.$$

したがって

$$PA - AQ = 2$$

であり、これは a によらない。

(2) 放物線は

$$x^2 = 4\sqrt{2}y$$

と書けるので、焦点は $Q(0, \sqrt{2})$ 、準線は $y = -\sqrt{2}$ である。

先に点の順序を確認する。半直線 QA 上の点を

$$X(\lambda) = Q + \lambda(A - Q) = (\lambda a, \sqrt{2} + \lambda(s - \sqrt{2})) \quad (\lambda \geq 0)$$

と表す。 $X(\lambda)$ の y 座標から放物線の y 座標を引いたものを

$$\phi(\lambda) = \sqrt{2} + \lambda(s - \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{8}a^2\lambda^2$$

とおく。 $a > 0$ なら $\phi'(\lambda) < 0$ ($a = 1, \lambda = 0$ の一点を除く) であり、

$$\phi(1) = s - \frac{\sqrt{2}}{8}a^2 \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{8} > 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi(\lambda) = -\infty$$

である。よって放物線との交点はただ 1 つで、そのパラメータは $\lambda > 1$ である。 $a = 0$ のときも $\phi(\lambda) = \sqrt{2} + \lambda(1 - \sqrt{2})$ だから、零点は $\lambda > 1$ である。したがって Q, A, B はこの順に並び、

$$AB = QB - AQ$$

である。

点 B の y 座標を y_B とする。半直線は Q から下向きで、 B は A より先にあるから

$$y_B \leq s \leq \sqrt{2} < 2.$$

ゆえに $BC = 2 - y_B$ である。一方、放物線の焦点・準線の性質より

$$QB = y_B + \sqrt{2}.$$

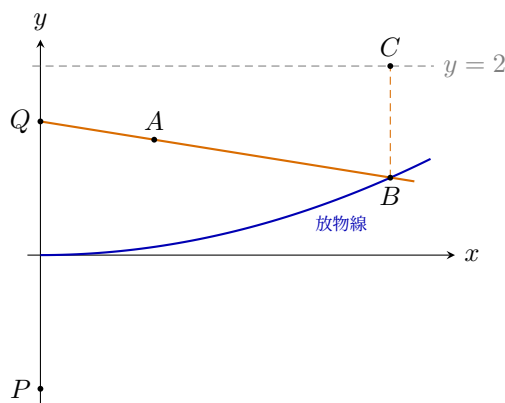
以上と (1) を用いると

$$\begin{aligned} PA + AB + BC &= PA + (QB - AQ) + (2 - y_B) \\ &= (PA - AQ) + (y_B + \sqrt{2}) + (2 - y_B) \\ &= 4 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

したがって、この長さの和も a によらず

$$4 + \sqrt{2}$$

である。



図は $0 < a < 1$ の模式図である。半直線上の順序は Q, A, B であり、 B は直線 $y = 2$ より下にある。

【総評】 難度 6、目安時間 22 分。(1) の完全平方と、(2) で放物線の焦点が問題中の点 Q に一致することが二つの要点である。採点上は、焦点・準線の性質を書くだけでなく、 $AB = QB - AQ$ を使える点の順序と、 $BC = 2 - y_B$ の符号を確認する必要がある。旧資料の $Q(0, 2)$ では (1) の一定値性が崩れるが、原典は $Q(0, \sqrt{2})$ である。準線を $y = \sqrt{2}$ と取り違えること、 B が A より先にあることを無説明で仮定することが典型的な失点である。

【第 3 問】

a, b を実数の定数とする。実数 x, y が

$$x^2 + y^2 \leq 25, \quad 2x + y \leq 5$$

をともに満たすとき、 $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$ の最小値を求めよ。

【方針】

平方完成して、点 $A_0(a, b)$ から凸領域 D までの距離の二乗を求める問題に変える。境界は円弧、直線上の線分、その端点 $E(0, 5), F(4, -3)$ の 3 種類である。最近点が (i) A_0 自身、(ii) 円弧上の半径方向の射影、(iii) E 、(iv) F 、(v) 線分 EF への垂線の足、となる条件を順に求める。端点の場合は、円と直線の外向き法線の非負結合で $A_0 - E, A_0 - F$ を表すと、境界条件を重複や漏れなく得られる。最後に各最近点を $z = (x - a)^2 + (y - b)^2 - a^2 - b^2$ へ代入する。

【解答】

領域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25, 2x + y \leq 5\}$$

を考えると

$$z = (x - a)^2 + (y - b)^2 - a^2 - b^2$$

である。したがって、点 $A_0(a, b)$ から D までの距離の二乗を d^2 とすれば、求める最小値は $d^2 - a^2 - b^2$ である。

円と直線の交点は

$$E = (0, 5), \quad F = (4, -3)$$

である。最近点の位置ごとに条件を調べる。

1. 点 A_0 自身が最近点となる場合

$A_0 \in D$ の条件は

$$a^2 + b^2 \leq 25, \quad 2a + b \leq 5.$$

このとき $d = 0$ なので、最小値は $-a^2 - b^2$ である。

2. 円弧上が最近点となる場合

$R = \sqrt{a^2 + b^2}$ とする。円の外側 $R \geq 5$ にある A_0 の半径方向の射影は

$$\left(\frac{5a}{R}, \frac{5b}{R} \right)$$

である。この点が残された円弧上にある条件は

$$\frac{10a + 5b}{R} \leq 5 \iff 2a + b \leq R.$$

方向を円周上で見ると、これは

$$a \leq 0 \quad \text{または} \quad b \leq -\frac{3}{4}a$$

と同値である。したがって条件は

$$a^2 + b^2 \geq 25, \quad \left(a \leq 0 \quad \text{または} \quad b \leq -\frac{3}{4}a \right).$$

このとき $d = R - 5$ だから、最小値は

$$(R - 5)^2 - R^2 = 25 - 10R.$$

3. 端点 E が最近点となる場合

E における円の外向き法線は $(0, 5)$ 、直線境界の外向き法線は $(2, 1)$ である。よって

$$(a, b) - E = \lambda(0, 5) + \mu(2, 1) \quad (\lambda, \mu \geq 0)$$

と表せることが条件である。これを成分で解くと

$$a \geq 0, \quad b \geq \frac{1}{2}a + 5.$$

このときの最小値は

$$|A_0E|^2 - a^2 - b^2 = 25 - 10b.$$

4. 端点 F が最近点となる場合

同様に F における 2 本の外向き法線は $(4, -3), (2, 1)$ である。

$$(a, b) - F = \lambda(4, -3) + \mu(2, 1) \quad (\lambda, \mu \geq 0)$$

を解くと

$$\lambda = \frac{a - 2b - 10}{10}, \quad \mu = \frac{3a + 4b}{10}.$$

したがって条件は

$$-\frac{3}{4}a \leq b \leq \frac{1}{2}a - 5.$$

このときの最小値は

$$|A_0F|^2 - a^2 - b^2 = 25 - 8a + 6b.$$

5. 線分 EF の内部が最近点となる場合

直線 $2x + y = 5$ への垂線の足は

$$\left(\frac{a - 2b + 10}{5}, \frac{-2a + 4b + 5}{5} \right).$$

この点が線分 EF 上にあり、 A_0 が直線の外側にある条件は

$$2a + b \geq 5, \quad \frac{1}{2}a - 5 \leq b \leq \frac{1}{2}a + 5.$$

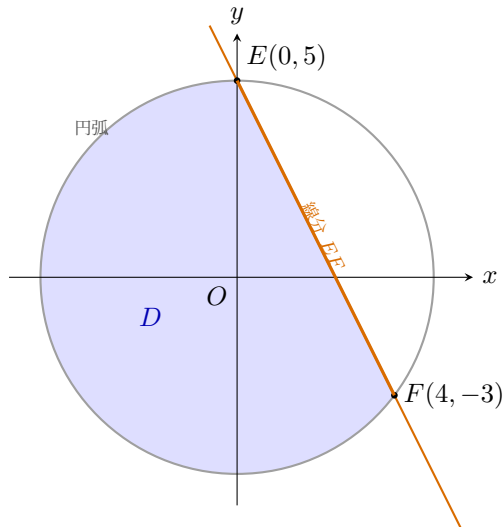
直線までの距離の二乗は $(2a + b - 5)^2/5$ なので、最小値は

$$\frac{(2a + b - 5)^2}{5} - a^2 - b^2 = -\frac{1}{5}a^2 - \frac{4}{5}b^2 + \frac{4}{5}ab - 4a - 2b + 5.$$

以上より、求める最小値は

$$\begin{cases} -a^2 - b^2 & (a^2 + b^2 \leq 25, 2a + b \leq 5), \\ 25 - 10\sqrt{a^2 + b^2} & (a^2 + b^2 \geq 25, a \leq 0 \text{ または } b \leq -\frac{3}{4}a), \\ 25 - 10b & (a \geq 0, b \geq \frac{1}{2}a + 5), \\ 25 - 8a + 6b & (-\frac{3}{4}a \leq b \leq \frac{1}{2}a - 5), \\ -\frac{1}{5}a^2 - \frac{4}{5}b^2 + \frac{4}{5}ab - 4a - 2b + 5 & (2a + b \geq 5, \frac{1}{2}a - 5 \leq b \leq \frac{1}{2}a + 5) \end{cases}$$

である。境界上で条件が重なる場合、隣り合う式の値は一致する。



最近点は、青色領域の内部、灰色の円弧、橙色の線分、または両端点 E, F のいずれかである。

【総評】 難度 8、目安時間 35 分。二変数の最小化を凸領域への最短距離として読み替え、境界を「円弧・線分・2 端点」に分ける問題である。採点上は、候補点の値だけでなく、その点が実際に最近点になる (a, b) の条件を明示することが最重要である。とくに円弧の条件は $a \leq 0$ または $b \leq -3a/4$ であり、両方を同時に課してはいけない。線分への垂線の足が端点間にある条件、端点の法線方向、隣接領域の境界で式が一致することまで確認すると、場合分けの漏れを防げる。

【第 4 問】

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり、最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

- (i) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば A に 1 点を与え、コインは A がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、 A はコインを B に渡す。
- (ii) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば B に 1 点を与え、コインは B がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、 B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で、2 点を獲得した方の勝利とする。 A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

【方針】

最後の n 回目に A が 2 点目を取る事象を逆向きに整理する。 $n-1$ 回目まででは、裏の個数が偶数で持ち主が A 、 A の表がちょうど 1 回、 B の表が 0 回または 1 回でなければならない。裏を 2 回ずつ区切ると、 A が持つ区間は $r+1$ 個、 B が持つ区間は r 個になる。表を置く区間を選ぶことで列を重複なく数え、 n の偶奇ごとに個数を求めた後、最後の表を含む全 n 回の確率 2^{-n} を掛ける。小さい n も式に含まれるか確認する。

【解答】

n 回目に A が勝つには、 n 回目の直前に A がコインを持っており、その時点で A の得点がちょうど 1 点でなければならない。そして n 回目に表が出て、 A が 2 点目を得る。

最初から $n-1$ 回目までを考える。この間に出た裏の個数が偶数ならコインは A が持ち、奇数なら B が持つ。したがって、裏の個数が偶数の状態で出た表は A の得点、裏の個数が奇数の状態で出た表は B の得点になる。 $m = n-1$ とする。 m 回目までの列は、裏の個数が偶数で、 A の表が 1 回、 B の表が 0 回または 1 回でなければならない。

裏が $2r$ 回出たとする。すると、 A が持っている区間は $r+1$ 個、 B が持っている区間は r 個ある。 A の表はちょうど 1 回なので、どの A の区間で表を出すかは $r+1$ 通りである。 B の表が 0 回のとき、列の長さは $2r+1$ であり、個数は $r+1$ 通りである。これは m が奇数のときで、 $r = \frac{m-1}{2}$ だから個数は $\frac{m+1}{2}$ である。 B の表が 1 回のとき、列の長さは $2r+2$ であり、 B のどの区間で表を出すかを選ぶので個数は $r(r+1)$ である。これは m が偶数のときで、 $r = \frac{m}{2} - 1$

だから個数は $\frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 1 \right)$ である。

最後の n 回目は表でなければならない。したがって

$$p(n) = \begin{cases} \frac{n}{2^{n+1}} & (n \text{ が偶数}), \\ \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である。なお奇数の場合は $n = 1, 3$ でも右辺は 0 となり、実際その回数では A は勝てない。

【総評】 難度 6、目安時間 25 分。終了時刻がちょうど n 回目なので、勝者だけでなく $n - 1$ 回目まで両者が 2 点未満であることを数える必要がある。裏の個数の偶奇が持ち主を決めると見抜き、裏 2 回を一組として A の区間 $r + 1$ 個、 B の区間 r 個を作るのが中心である。採点上は、 B の表が 0 回と 1 回のどちらかに限られる理由、最後の表まで含めた分母が 2^n であることを明記したい。奇数式が $n = 1, 3$ でも 0 になることは端の検算になる。