

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 2013 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

実数 a, b に対し平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める。このとき、次の条件 (i), (ii) がともに成り立つような (a, b) をすべて求めよ。

(i) $P_0 = P_6$

(ii) $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ は相異なる。

第 2 問

a を実数とし, $x > 0$ で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$g(x) = \sin x + ax$$

このとき $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが $x > 0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ。

第 3 問

A , B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり、最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

- (i) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば A に 1 点を与え、コインは A がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、 A はコインを B に渡す。
- (ii) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば B に 1 点を与え、コインは B がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、 B はコインを A に渡す。

そして A , B のいずれかが 2 点を獲得した時点で、2 点を獲得した方の勝利とする。

- (1) A , B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

第 4 問

$\triangle ABC$ において $\angle BAC = 90^\circ$, $|\overrightarrow{AB}| = 1$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$ とする。 $\triangle ABC$ の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \vec{0}$$

をみたす。

- (1) $\angle APB$, $\angle APC$ を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$, $|\overrightarrow{PC}|$ を求めよ。

第 5 問

次の命題 P を証明したい。

命題 P 次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数) A が存在する。

(a) A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b) A を 10 進法で表したとき, 1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1) y は自然数とする。このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x + y - 1)(x + y)(x + y + 1) < x^3 + (3y + 1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2) 命題 P を証明せよ。

第 6 問

座標空間において、 xy 平面内で不等式 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$ とする。正方形 S を、直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1 , 直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

- (1) $0 \leq t < 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。
- (2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)