

東京大学 2013 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

実数 a, b に対し平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める。このとき、次の条件 (i), (ii) がともに成り立つような (a, b) をすべて求めよ。

(i) $P_0 = P_6$

(ii) $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ は相異なる。

【方針】

点 $P_n(x_n, y_n)$ を複素数 $z_n = x_n + y_n i$ で表すと、漸化式は $z_{n+1} = (a + bi)z_n$ となる。したがって $z_n = (a + bi)^n$ である。 $P_0 = P_6$ から 6 乗根を列挙し、条件 (ii) を「1 回から 5 回では初めての点に戻らない」と読み替えて、位数が 6 でない $1, -1$ と 3 乗根を除く。最後に残った 2 点を実部・虚部へ戻す。

【解答】

$z_n = x_n + y_n i$ とおく。与えられた漸化式は $z_{n+1} = (a + bi)z_n$ と書ける。初期値は $z_0 = 1$ なので、帰納的に $z_n = (a + bi)^n$ である。

条件 (i) の $P_0 = P_6$ は $z_0 = z_6$ と同じであり、 $z_0 = 1$ だから $(a + bi)^6 = 1$ である。

また条件 (ii) は、 $P_0, P_1, \dots, P_5$ が相異なることである。特に $P_k = P_0$ となる $1 \leq k \leq 5$ があってはならない。これは $(a + bi)^k \neq 1 \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$ という条件である。 $a + bi$ を極形式で $a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と書く。 $(a + bi)^6 = 1$ より $r^6 = 1$ であり、 $r \geq 0$ だから $r = 1$ である。また $6\theta = 2\pi m$ を満たす整数 m が存在する。したがって $a + bi = \cos \frac{m\pi}{3} + i \sin \frac{m\pi}{3}$ である。

このうち、1 乗から 5 乗では 1 に戻らないものは、6 乗して初めて 1 になるもの、すなわち m が 6 と互いに素な場合である。 $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ の中では $m = 1, 5$ である。よって $a + bi = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ または $a + bi = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$ である。したがって求める (a, b) は

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。

【総評】 難度 4、目安時間 10 分。与えられた実数の漸化式が、複素数 $a + bi$ の掛け算そのものであることに気づけば短く解ける。採点上は $(a + bi)^6 = 1$ だけで終えず、条件 (ii) により 6 乗して初めて 1 になるものだけを残す必要がある。6 乗根をすべて答えること、 -1 や原始 3 乗根を除外し忘れることが典型的な誤りである。得られた 2 つは単位円上で偏角が $\pi/3, 5\pi/3$ の点であり、実際に 6 点が相異なることもすぐ確認できる。

【第 2 問】

a を実数とし、 $x > 0$ で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$g(x) = \sin x + ax$$

このとき $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが $x > 0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ。

【方針】

共有点条件を $a = F(x)$ の形に直し、水平線 $y = a$ と $F(x) = (\cos x - x \sin x)/x^2$ の交点数を数える。導関数の分子が $-(x^2 + 2) \cos x$ まで簡単になるため、極値の位置と値を順に並べられる。正の a では原点近くの減少枝の 1 点に、ちょうど一つの正の山の 2 点を加える条件を求める。負の a では最初の谷の前後の 2 点に、次の谷での接点 1 点だけを加える条件を求める。極値と一致する端点では接点が 1 つとして数えられることに注意する。

【解答】

共有点は

$$\frac{\cos x}{x} = \sin x + ax$$

を満たす $x > 0$ に対応する。これを a について解いて

$$a = F(x), \quad F(x) = \frac{\cos x - x \sin x}{x^2}$$

を得る。よって、曲線 $y = F(x)$ と水平線 $y = a$ の交点数を数えればよい。

微分すると

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(-2 \sin x - x \cos x)x^2 - 2x(\cos x - x \sin x)}{x^4} \\ &= -\frac{(x^2 + 2) \cos x}{x^3}. \end{aligned}$$

$x > 0$ では $(x^2 + 2)/x^3 > 0$ なので、 $F'(x)$ の符号は $-\cos x$ の符号で決まる。

極値は

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で生じる。 $m = 0, 1, 2, \dots$ とすると、極小値は

$$F\left(\frac{(4m+1)\pi}{2}\right) = -\frac{2}{(4m+1)\pi},$$

極大値は

$$F\left(\frac{(4m+3)\pi}{2}\right) = \frac{2}{(4m+3)\pi}$$

である。また

$$\lim_{x \rightarrow +0} F(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0.$$

$a > 0$ の場合

区間 $(0, \pi/2)$ では F は $+\infty$ から $-2/\pi$ まで減少するので、交点は常に 1 つある。正の極大値は

$$\frac{2}{3\pi}, \quad \frac{2}{7\pi}, \quad \frac{2}{11\pi}, \quad \dots$$

と小さくなる。したがって最初の正の山では水平線が 2 点で交わり、2 番目以降の正の山では交わらない条件は

$$\frac{2}{7\pi} < a < \frac{2}{3\pi}.$$

このとき交点数は $1 + 2 = 3$ である。上端では最初の山が接点 1 つになるので 2 点、下端では次の山にも接点 1 つが加わって 4 点となり、いずれも除く。

$a < 0$ の場合

$-2/\pi < a < 0$ なら、最初の極小点の前後に 2 つの交点がある。その後の負の極小値は

$$-\frac{2}{5\pi}, -\frac{2}{9\pi}, -\frac{2}{13\pi}, \dots$$

と 0 に近づく。交点をちょうど 1 つだけ追加するには、2 番目の谷で接すればよい。したがって

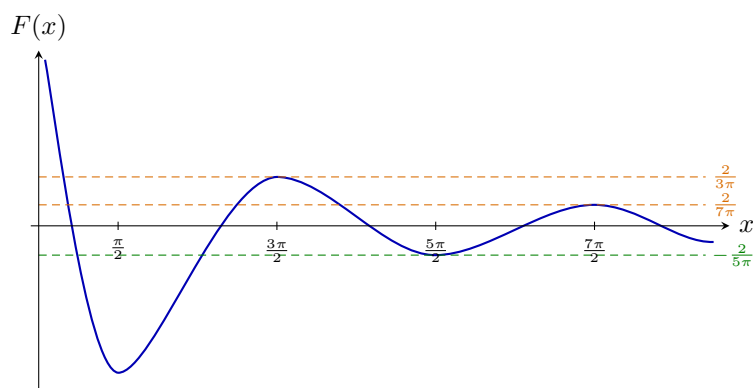
$$a = -\frac{2}{5\pi}.$$

これより大きい負数では後続の谷でも交点が増え、これより小さい負数では合計 3 点にならない。

$a = 0$ では振動する各枝に交点があり、3 点ではない。以上より

$$a = -\frac{2}{5\pi} \quad \text{または} \quad \frac{2}{7\pi} < a < \frac{2}{3\pi}$$

である。



極値の絶対値は右へ進むほど小さくなる。正の水平線では山を、負の水平線では谷を数える。

【総評】 難度 7、目安時間 28 分。パラメータ a を横に残したまま二曲線を比較せず、 $a = F(x)$ として水平線との交点数へ変換することが核心である。導関数が $-\cos x$ と同符号になるため、極値列を正確に書けば数え上げができる。採点上は、正の端点 $2/(3\pi), 2/(7\pi)$ で接点となるため开区間である理由と、負の値 $-2/(5\pi)$ は接点を 1 個だけ加えるため等号で含む理由を説明したい。極値の符号や添字を一つずらすことが典型的な失点である。

【第 3 問】

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり、最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

- (i) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば A に 1 点を与え、コインは A がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、 A はコインを B に渡す。
- (ii) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば B に 1 点を与え、コインは B がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、 B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で、2 点を獲得した方の勝利とする。

- (1) A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は最後の n 回目に A が 2 点目を取るための、それ以前の表裏列を数える。裏の個数が偶数なら持ち主は A であり、裏 $2r$ 回が作る A の $r+1$ 区間と B の r 区間へ、必要な表を配置する。(2) は $n=2k$ と $n=2k+1$ に分け、(1) の式を級数に代入する。等比級数を一度、二度微分して得る係数付きの和を用い、偶数項と奇数項を別々に評価する。

【解答】

(1) n 回目に A が勝つには、 $n-1$ 回目までに A が 1 点、 B が 0 点または 1 点であり、コインを A が持っていなければならない。そして n 回目に表が出る。

$n-1$ 回目までに裏が $2r$ 回出たとする。裏の個数が偶数なので、最後の持ち主は A である。裏で持ち主が交代するため、 A が持つ区間は $r+1$ 個、 B が持つ区間は r 個ある。

B の表が 0 回なら、 A の表 1 回を $r+1$ 個の区間のどこに置くかを選ぶので、列は $r+1$ 通りである。このとき $n-1=2r+1$ 、すなわち n は偶数であり、列の個数は $n/2$ である。

B の表が 1 回なら、 A の区間を $r+1$ 通り、 B の区間を r 通りに選ぶので、列は $r(r+1)$ 通りである。このとき $n-1=2r+2$ 、すなわち n は奇数であり、

$$r = \frac{n-3}{2}, \quad r+1 = \frac{n-1}{2}.$$

最後の表まで含めた各列の確率は 2^{-n} だから

$$p(n) = \begin{cases} \frac{n}{2^{n+1}} & (n \text{ が偶数}), \\ \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である。奇数の式は $n=1, 3$ でも 0 となり、実際の事象と一致する。

(2) 偶数 $n=2k$ の項は

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(2k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2^{2k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k}.$$

$|r| < 1$ での等比級数を微分すると

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^k = \frac{r}{(1-r)^2}$$

だから、 $r=1/4$ を代入して

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(2k) = \frac{4}{9}.$$

奇数 $n=2k+1$ の項は

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(2k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)(2k-2)}{2^{2k+3}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)}{4^k}.$$

さらに

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)r^k = \frac{2r^2}{(1-r)^3}$$

を用いると

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(2k+1) = \frac{4}{27}.$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = \frac{4}{9} + \frac{4}{27} = \frac{16}{27}.$$

▶ 別解 (2) : 状態方程式

【方針】

$\sum p(n)$ は、ゲームがいつ終わるかを問わず最終的に A が勝つ確率である。得点が $i, j \in \{0, 1\}$ のとき、持ち主が A の状態からの勝率を A_{ij} 、持ち主が B の状態からの勝率を B_{ij} とする。次の 1 投で表・裏が出る 2 場合に分けて連立方程式を作り、終局に近い $(1, 1)$ から $(1, 0), (0, 1), (0, 0)$ の順に戻す。

【解答】

(1) (1) の時刻別確率は解法 1 の数え上げで求める。ここでは、(2) の総和だけを最終勝率として独立に求める。

(2) 別解

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)$$

は、最終的に A が勝つ確率である。得点が (i, j) で、 A がコインを持つ状態からの A の勝率を A_{ij} 、 B が持つ状態からの勝率を B_{ij} とする。表なら持ち主が得点し、裏なら持ち主だけが交代するので

$$A_{ij} = \frac{1}{2}A_{i+1,j} + \frac{1}{2}B_{ij}, \quad B_{ij} = \frac{1}{2}B_{i,j+1} + \frac{1}{2}A_{ij}$$

である。ただし A が 2 点なら勝率 1、 B が 2 点なら勝率 0 とする。

まず得点 $(1, 1)$ では

$$A_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}B_{11}, \quad B_{11} = \frac{1}{2}A_{11},$$

よって

$$A_{11} = \frac{2}{3}, \quad B_{11} = \frac{1}{3}.$$

得点 $(1, 0)$ では

$$A_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}B_{10}, \quad B_{10} = \frac{1}{2}B_{11} + \frac{1}{2}A_{10},$$

より

$$A_{10} = \frac{7}{9}, \quad B_{10} = \frac{5}{9}.$$

得点 $(0, 1)$ では

$$A_{01} = \frac{1}{2}A_{11} + \frac{1}{2}B_{01}, \quad B_{01} = \frac{1}{2}A_{01},$$

より

$$A_{01} = \frac{4}{9}, \quad B_{01} = \frac{2}{9}.$$

最後に初期得点 $(0, 0)$ では

$$A_{00} = \frac{1}{2}A_{10} + \frac{1}{2}B_{00}, \quad B_{00} = \frac{1}{2}B_{01} + \frac{1}{2}A_{00}.$$

先ほどの値を代入して解くと

$$A_{00} = \frac{16}{27}.$$

初期状態は A がコインを持つ得点 $(0, 0)$ だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = A_{00} = \frac{16}{27}.$$

【総評】 難度 6、目安時間 30 分。(1) は裏の個数の偶奇で持ち主を追い、勝利直前の列だけを重複なく数える問題である。(2) の級数計算では、 $2k/2^{2k+1} = k/4^k$ と、奇数項に残る係数 $1/2$ を落とさないことが採点上の注意点になる。別解では総和を最終勝率と読み替え、終局に近い状態から戻すと 4 組の連立方程式だけで済む。時刻別確率の和と状態ごとの勝率が $16/27$ で一致するので、両解法は強い相互検算になる。

【第 4 問】

$\triangle ABC$ において $\angle BAC = 90^\circ$, $|\vec{AB}| = 1$, $|\vec{AC}| = \sqrt{3}$ とする。 $\triangle ABC$ の内部の点 P が

$$\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} + \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|} + \frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|} = \vec{0}$$

をみたす。

(1) $\angle APB$, $\angle APC$ を求めよ。

(2) $|\vec{PA}|$, $|\vec{PB}|$, $|\vec{PC}|$ を求めよ。

【方針】

3 本の単位ベクトルを $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ とおく。和が 0 なので、たとえば $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = 1$ を平方し、各内積が $-1/2$ 、すなわち 3 方向の角がすべて 120° と示す。(2) は $PA = x, PB = y, PC = z$ とおき、3 辺 $1, \sqrt{3}, 2$ に余弦定理を使う。3 式の差を $S = x + y + z$ で因数分解して距離差を求め、1 本の方程式まで減らす。最後に $x, y, z > 0$ を用いて余分な解 $S^2 = 1$ を除く。

【解答】

(1)

$$\mathbf{u} = \frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|}, \quad \mathbf{v} = \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|}, \quad \mathbf{w} = \frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|}$$

とおく。これらはいずれも長さ 1 のベクトルであり、条件より $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \vec{0}$ である。したがって $\mathbf{u} + \mathbf{v} = -\mathbf{w}$ であり、両辺の長さの二乗を比べると $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{w}|^2 = 1$ である。左辺は

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

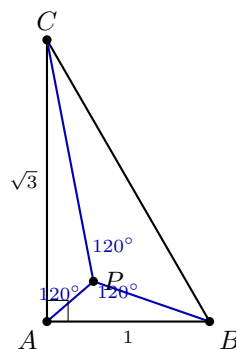
なので $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{2}$ である。よって $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角は 120° である。同様に他の 2 組も 120° をなす。したがって $\angle APB = 120^\circ$, $\angle APC = 120^\circ$ である。

(2) $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$ とおく。 $\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ$ であり、 $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, $BC = 2$ である。余弦定理より $x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = 1$ すなわち $x^2 + y^2 + xy = 1$ である。同様に $x^2 + z^2 + xz = 3$, $y^2 + z^2 + yz = 4$ である。

3 式の差をとる。第 3 式から第 2 式を引くと $y^2 - x^2 + z(y - x) = 1$ であり、 $(y - x)(x + y + z) = 1$ である。また第 2 式から第 1 式を引くと $z^2 - y^2 + x(z - y) = 2$ より $(z - y)(x + y + z) = 2$ である。 $S = x + y + z$ とおくと $y = x + \frac{1}{S}$, $z = y + \frac{2}{S} = x + \frac{3}{S}$ である。したがって $S = x + y + z = 3x + \frac{4}{S}$ より $x = \frac{S^2 - 4}{3S}$, $y = \frac{S^2 - 1}{3S}$ である。これを $x^2 + y^2 + xy = 1$ に代入すると $S^4 - 8S^2 + 7 = 0$ である。 $S > 0$ であり、 $x > 0$ も必要なので $S^2 = 1$ は不適、よって $S^2 = 7$ である。

したがって $S = \sqrt{7}$ であり、 $x : y : z = 1 : 2 : 4$ である。ゆえに

$$|\vec{PA}| = \frac{\sqrt{7}}{7}, \quad |\vec{PB}| = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \quad |\vec{PC}| = \frac{4\sqrt{7}}{7}.$$



3 本の青い単位方向ベクトルの和が 0 になるため、点 P のまわりの 3 角はすべて 120° になる。

【総評】 難度 6、目安時間 22 分。単位ベクトル 3 本の和が 0 なら、互いの角がすべて 120° になることが第一の山である。距離計算では余弦定理の 3 式を正面から連立するより、差を取って $(y-x)S=1$ 、 $(z-y)S=2$ とするのが決定的である。採点上は $S^4-8S^2+7=0$ の 2 候補から、距離が正であるため $S^2=1$ を除く説明が必要になる。 $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{AP}$ の向きを取り違えて 60° とすることが典型的な失点である。

【第 5 問】

次の命題 P を証明したい。

命題 P 次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数) A が存在する。

(a) A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b) A を 10 進法で表したとき、1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1) y は自然数とする。このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3 + (3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2) 命題 P を証明せよ。

【方針】

(1) は中央の数を $x+y$ と見て積を $(x+y)^3 - (x+y)$ に直し、左右の不等式を別々に整理する。左側は自然数 y なら全 $x > 0$ で成り立ち、右側だけが上に開く二次不等式を与える。(2) は 99 個の 1 からなる整数 R の各位の和が 99 であることから $R=3y$ とする。十分大きい $x=10^N$ を (1) に入れ、積 A を幅 10^{2N} の区間に挟む。最後に $\lfloor A/10^{2N} \rfloor = 10^N + R$ と書いて、99 桁の 1 が繰り上がりで崩れないことを厳密に示す。

【解答】

(1)

$$(x+y-1)(x+y)(x+y+1) = (x+y)^3 - (x+y)$$

である。展開すると

$$(x+y-1)(x+y)(x+y+1) = x^3 + 3yx^2 + (3y^2 - 1)x + y^3 - y.$$

左側の不等式は

$$(3y^2 - 1)x + y^3 - y > 0$$

と同値である。 y は自然数なので $3y^2 - 1 > 0$, $y^3 - y \geq 0$ であり、これはすべての $x > 0$ で成り立つ。

右側の不等式は

$$x^2 - (3y^2 - 1)x - (y^3 - y) > 0$$

と同値である。この二次式の 2 解のうち大きい方は

$$\frac{3y^2 - 1 + \sqrt{(3y^2 - 1)^2 + 4(y^3 - y)}}{2}$$

である。もう一方の解は 0 以下なので、 $x > 0$ のもとで求める範囲は

$$x > \frac{3y^2 - 1 + \sqrt{9y^4 + 4y^3 - 6y^2 - 4y + 1}}{2}.$$

(2) 99 個の 1 が並ぶ整数を

$$R = \underbrace{111 \cdots 111}_{99 \text{ 桁}}$$

とする。各位の和が 99 なので R は 3 の倍数である。そこで自然数

$$y = \frac{R}{3}$$

をとる。

(1) の下限を超えるように十分大きい自然数 N を選び、さらに $N \geq 100$ として

$$x = 10^N$$

とおく。そして

$$A = (10^N + y - 1)(10^N + y)(10^N + y + 1)$$

と定める。これは連続する 3 つの自然数の積である。

(1) と $3y = R$ より

$$10^{3N} + R10^{2N} < A < 10^{3N} + (R+1)10^{2N}.$$

両辺を 10^{2N} で割ると

$$10^N + R < \frac{A}{10^{2N}} < 10^N + R + 1.$$

したがって

$$\left\lfloor \frac{A}{10^{2N}} \right\rfloor = 10^N + R.$$

$N > 99$ なので、整数 $10^N + R$ の末尾 99 桁はすべて 1 である。この整数は A の 10^{2N} の位以上の桁を切り出したものだから、 A の 10 進表示にも 1 が連続して 99 回現れる。よって A は条件 (a), (b) をともに満たし、命題 P が証明された。

【総評】 難度 7、目安時間 30 分。誘導不等式を使って、連続 3 整数の積の 10 進表示へ指定した桁列を埋め込む存在証明である。採点上は、99 個の 1 からなる R が 3 の倍数なので $3y = R$ とできること、 10^N を (1) の下限より大きく取れること、上下両方の不等式で桁上がりや封じることの 3 点が必要になる。単に「十分大きければ 1 が並ぶ」と述べるだけでは不十分であり、床関数で上位桁が $10^N + R$ に固定されることまで書くこと完全である。

【第 6 問】

座標空間において、 xy 平面内で不等式 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$ とする。正方形 S を、直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1 , 直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1) $0 \leq t < 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

【方針】

回転軸に合わせて $u = (x+y)/\sqrt{2}$, $v = (x-y)/\sqrt{2}$ と座標を 45 度回す。正方形は $|u| + |v| \leq \sqrt{2}$, BD は u 軸、 AC は v 軸となる。(1) は V_1 を $v^2 + z^2 \leq (\sqrt{2} - |u|)^2$ と表し、平面 $x = t$, すなわち $u + v = \sqrt{2}t$ 上で $u < 0, u > 0$ に分けて断面を積分する。平面内の長さが $\sqrt{2}du$ になることを面積要素へ反映する。(2) は二つの回転体の条件を重ね、符号と u, v の大小による 8 個の合同部分へ分ける。三角形領域 T を極形式で積分し、最後の一変数積分は 2 段階の置換を省略せず計算する。

【解答】

(1) $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ とおく。これは xy 平面内で座標軸を 45° 回転する変換である。正方形 S は $|u| + |v| \leq \sqrt{2}$, $z = 0$ と表される。

直線 BD は u 軸である。したがって S を BD のまわりに回転してできる立体 V_1 は、各 u に対して半径 $\sqrt{2} - |u|$ の円板をもつので $v^2 + z^2 \leq (\sqrt{2} - |u|)^2$ で表される。

平面 $x = t$ は $\frac{u+v}{\sqrt{2}} = t$ すなわち $u + v = \sqrt{2}t$ である。よってこの平面上では $v = \sqrt{2}t - u$ であり、断面は $z^2 \leq (\sqrt{2} - |u|)^2 - (\sqrt{2}t - u)^2$ を満たす点からなる。

まず $u \leq 0$ では $z^2 \leq (\sqrt{2} + u)^2 - (\sqrt{2}t - u)^2 = 2(1+t)(1-t + \sqrt{2}u)$ である。したがって $-\frac{1-t}{\sqrt{2}} \leq u \leq 0$ である。

次に $u \geq 0$ では $z^2 \leq (\sqrt{2} - u)^2 - (\sqrt{2}t - u)^2 = 2(1-t)(1+t - \sqrt{2}u)$ である。したがって $0 \leq u \leq \frac{1+t}{\sqrt{2}}$ である。

平面 $x = t$ 上で u が du だけ変化すると、実際の長さは $\sqrt{2}du$ である。よって面積要素は $\sqrt{2}du dz$ である。したがって断面積は

$$\sqrt{2} \int_{-(1-t)/\sqrt{2}}^0 2\sqrt{2(1+t)(1-t + \sqrt{2}u)} du + \sqrt{2} \int_0^{(1+t)/\sqrt{2}} 2\sqrt{2(1-t)(1+t - \sqrt{2}u)} du.$$

第 1 項では $w = 1 - t + \sqrt{2}u$ とおくと

$$\sqrt{2} \int_{-(1-t)/\sqrt{2}}^0 2\sqrt{2(1+t)(1-t+\sqrt{2}u)} du = \frac{4\sqrt{2}}{3}(1-t)\sqrt{1-t^2}$$

である。第 2 項では $w = 1 + t - \sqrt{2}u$ とおくと

$$\sqrt{2} \int_0^{(1+t)/\sqrt{2}} 2\sqrt{2(1-t)(1+t-\sqrt{2}u)} du = \frac{4\sqrt{2}}{3}(1+t)\sqrt{1-t^2}$$

である。よって断面積は

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}\{(1-t) + (1+t)\}\sqrt{1-t^2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t^2}$$

である。

(2) 同様に、 V_2 は v 軸まわりの回転体であるから $u^2 + z^2 \leq (\sqrt{2} - |v|)^2$ で表される。

対称性により、 $u \geq 0, v \geq 0$ の部分を求めて 4 倍すればよい。さらにこの第 1 象限内では、直線 $u = v$ に関して対称であるから、 $0 \leq u \leq v$ の部分を求めて、最終的に 8 倍すればよい。

第 1 象限では $u + v \leq \sqrt{2}$ である。 $0 \leq u \leq v$ の部分では $(\sqrt{2} - v)^2 - u^2 \leq (\sqrt{2} - u)^2 - v^2$ となるので、 z の範囲は $-\sqrt{(\sqrt{2} - v)^2 - u^2} \leq z \leq \sqrt{(\sqrt{2} - v)^2 - u^2}$ である。

ここで $q = \sqrt{2} - v$ とおくと、考える領域は $T: u \geq 0, q \geq 0, u \leq q, u + q \leq \sqrt{2}$ となる。この部分の体積を J とする。

$$u = r \sin \theta, \quad q = r \cos \theta$$

とおき、領域 T を原点から出る角度 θ の細い扇形に分ける。高さは

$$2\sqrt{q^2 - u^2} = 2r\sqrt{\cos 2\theta}$$

であり、半径 r から $r + dr$ までの細い扇形の面積は $r dr d\theta$ である。領域 T は

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta + \cos \theta}$$

で表される。各 θ について半径方向の体積を先に足すと

$$\left[\frac{2}{3} r^3 \sqrt{\cos 2\theta} \right]_0^{\sqrt{2}/(\sin \theta + \cos \theta)} d\theta$$

となる。したがって

$$J = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{(\sin \theta + \cos \theta)^3} d\theta.$$

残った積分を

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{(\sin \theta + \cos \theta)^3} d\theta$$

とおく。まず $t = \tan \theta$ とすると

$$\cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$$

だから

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{(1+t)^{5/2}} dt.$$

さらに

$$w = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

とおくと

$$t = \frac{1-w^2}{1+w^2}, \quad dt = -\frac{4w}{(1+w^2)^2} dw.$$

このとき被積分関数と dt の積は $-w^2 dw$ となり、 $t = 0, 1$ はそれぞれ $w = 1, 0$ に対応する。よって

$$I = \int_1^0 (-w^2) dw = \int_0^1 w^2 dw = \frac{1}{3}.$$

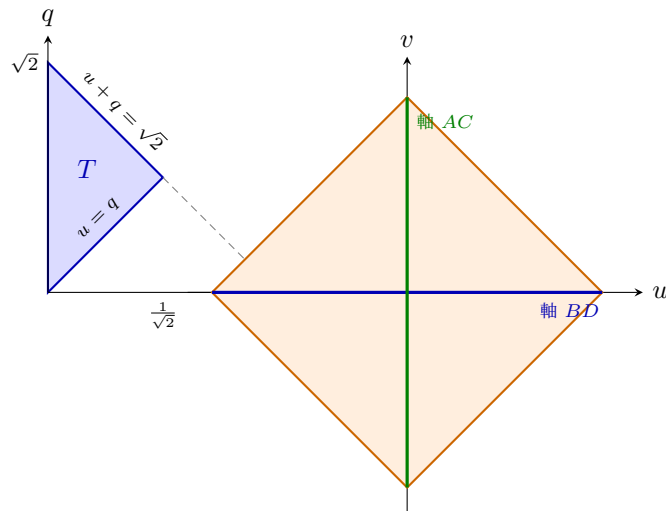
したがって

$$J = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

求める共通部分全体の体積は $8J$ なので

$$\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

である。



回転後の u, v 座標

左図の三角形 T が、対称性で全体の $1/8$ に絞った積分領域である。

【総評】 難度 8、目安時間 40 分。二本の対角線を新しい座標軸に選ぶことが全体の見通しを決める空間図形問題である。(1) では平面 $x = t$ 上で u が du 変わる実際の長さが $\sqrt{2} du$ となる点が最大の注意である。(2) では u, v の符号で 4 倍、さらに $u \leq v$ と $v \leq u$ で 2 倍して合計 8 倍する。 $u \leq v$ 側で小さい高さ上限を選ぶこと、領域 T の二条件 $u \leq q$, $u + q \leq \sqrt{2}$ を逆にしないこと、最後の置換積分の端点を反転させることが主な失点箇所である。