

東京大学 2015 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

正の実数 a に対して、座標平面上で次の放物線を考える。

$$C: y = ax^2 + \frac{1 - 4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき、 C の通過する領域を図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

固定した x に対して、放物線の式を $y = a(x^2 - 1) + 1/(4a)$ と見て、 $a > 0$ が動くときの値域を調べる。 $|x| < 1$ では第 1 項が負方向へ無限に下がり、第 2 項は $a \rightarrow 0 + 0$ で正方向へ発散するため全実数を取る。 $|x| = 1$ は $y = 1/(4a) > 0$ 、 $|x| > 1$ は相加相乗または微分で最小値 $\sqrt{x^2 - 1}$ を求める。

【解答】

放物線の式を整理すると $y = ax^2 + \frac{1 - 4a^2}{4a} = a(x^2 - 1) + \frac{1}{4a}$ である。ここで x を固定し、 $a > 0$ を動かしたときの y の値域を調べる。

(i) $|x| < 1$ のとき

このとき $x^2 - 1 < 0$ である。 $a \rightarrow +0$ とすると $\frac{1}{4a} \rightarrow +\infty$ であるから $y \rightarrow +\infty$ である。一方、 $a \rightarrow \infty$ とすると $a(x^2 - 1) \rightarrow -\infty$ であるから $y \rightarrow -\infty$ である。右辺は a について連続なので、 y はすべての実数値を取る。

(ii) $|x| = 1$ のとき

このとき $x^2 - 1 = 0$ であるから $y = \frac{1}{4a}$ である。 $a > 0$ より $y > 0$ であり、逆に任意の $y > 0$ に対して $a = 1/(4y)$ とすればその値を取る。

(iii) $|x| > 1$ のとき

$c = x^2 - 1$ とおくと $c > 0$ であり $y = ca + \frac{1}{4a}$ である。相加相乗平均より $ca + \frac{1}{4a} \geq 2\sqrt{ca \cdot \frac{1}{4a}} = \sqrt{c} = \sqrt{x^2 - 1}$ である。等号は $ca = \frac{1}{4a}$ すなわち $a = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ のときに成り立つ。よってこの場合の値域は $y \geq \sqrt{x^2 - 1}$ である。

以上より、 C の通過する領域は

$$\begin{cases} \text{すべての実数 } y & (|x| < 1), \\ y > 0 & (|x| = 1), \\ y \geq \sqrt{x^2 - 1} & (|x| > 1) \end{cases}$$

である。図では、 $|x| < 1$ の縦帯はすべて塗り、境界線 $x = \pm 1$ 上では $y > 0$ の部分だけを含める。 $|x| > 1$ では双曲線型の曲線 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ およびその上側を含める。

▶ 解法 2 (媒介変数の 2 次方程式)

【方針】

点 (x, y) を固定し、その点を通る放物線が存在する条件を a の 2 次方程式の正の実数解条件へ直す。 $x^2 - 1$ の符号で 3 場合に分け、 $|x| > 1$ では判別式だけでなく根の和・積から正の根であることも確認する。最後に含む境界と含まない境界を図へ反映する。

【解答】

点 (x, y) を通る放物線が存在するための条件を調べる。与式は

$$y = a(x^2 - 1) + \frac{1}{4a}$$

だから、 $a > 0$ について

$$4(x^2 - 1)a^2 - 4ya + 1 = 0 \quad (1)$$

となる。

(i) $|x| < 1$ のとき

(1) の左辺を $G(a)$ とする。 $G(0) = 1 > 0$ であり、 $a \rightarrow \infty$ では $x^2 - 1 < 0$ より $G(a) \rightarrow -\infty$ である。したがって任意の実数 y に対して、中間値の定理により正の解 a が存在する。

(ii) $|x| = 1$ のとき

(1) は $-4ya + 1 = 0$ となる。正の解をもつための必要十分条件は $y > 0$ である。

(iii) $|x| > 1$ のとき

(1) が実数解をもつ条件は、判別式から

$$16\{y^2 - (x^2 - 1)\} \geq 0$$

である。ただし $a > 0$ が必要である。(1) の 2 根の積は正、根の和は

$$\frac{y}{x^2 - 1}$$

だから、実数解が存在するとき 2 根がともに正であるための条件は $y > 0$ である。よって

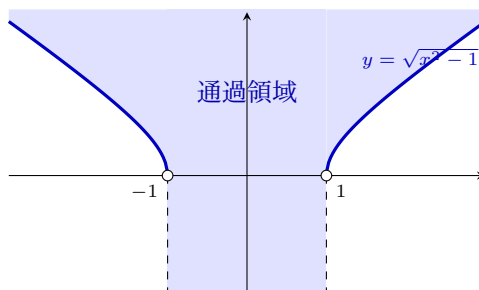
$$y \geq \sqrt{x^2 - 1}$$

が必要十分である。

以上より通過領域は

$$\begin{cases} y \text{ は任意} & (|x| < 1), \\ y > 0 & (|x| = 1), \\ y \geq \sqrt{x^2 - 1} & (|x| > 1) \end{cases}$$

である。



双曲線の上側の枝は含まれる。点 $(\pm 1, 0)$ と、そこから下へ延びる縦の境界は含まれないので、図では白丸と破線で表した。

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 15 分。媒介変数 a を消す問題である。第 1 解法は固定した x で値域を調べ、第 2 解法は a の 2 次方程式について正の解の存在条件を調べる。採点上は $|x| = 1$ のとき $y = 0$ が含まれない点、 $|x| > 1$ で等号が実際に達成される点を明記したい。判別式だけでは $y \leq -\sqrt{x^2 - 1}$ も残るため、根の和・積から $a > 0$ を確認する必要がある。図では双曲線側を実線、 $x = \pm 1$ の下側を破線、 $(\pm 1, 0)$ を白丸として包含関係を明示した。

【第 2 問】

どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し、次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ、出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 AA を書き、4 のときは文字 B を、5 のときは文字 C を、6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ、同じ規則に従って、 AA , B , C , D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば、さいころを 5 回投げ、その出た目が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると、得られる文字列は、

$$AACDAAB$$

となる。このとき、左から 4 番目の文字は D 、5 番目の文字は A である。

- (1) n を正の整数とする。 n 回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2) n を 2 以上の整数とする。 n 回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で、かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

【方針】

AA が書かれる確率は $1/2$ 、長さ 1 の文字 B, C, D のいずれかが書かれる確率も $1/2$ である。したがって (1) の位置確率は、文字符号の種類に関係なく、先頭ブロックの長さが 2 か 1 かで漸化式を立てる。(2) では AB が現れるのは AA の直後に特に B が続くときだけである。まず指定位置の直後がブロック境界になる確率を求め、最後に AA の確率 $1/2$ と B の確率 $1/6$ を掛ける。

【解答】

(1)

左から n 番目の文字が A である確率を a_n とする。1 回の試行で書かれる文字数は 1 または 2 であるから、 n 回試行した時点で文字列の長さは少なくとも n であり、左から n 番目の文字はその後の試行に影響されない。

最初に AA が書かれる確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ であり、長さ 1 の文字 B, C, D のいずれかが書かれる確率も $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ である。よって $a_1 = \frac{1}{2}$ である。また、2 番目の文字が A であるのは、最初に AA が書かれる場合、または最初に長さ 1 の文字が書かれて次に AA が書かれる場合であるから $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ である。

$n \geq 3$ のとき、最初に AA が書かれた場合は残りの文字列の $n-2$ 番目、最初に長さ 1 の文字が書かれた場合は残りの文字列の $n-1$ 番目を見ればよい。したがって $a_n = \frac{1}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n-1}$ ($n \geq 3$) である。特性方程式 $2\lambda^2 = \lambda + 1$ の解は $1, -1/2$ であるから $a_n = A + B(-\frac{1}{2})^n$ と書ける。初期値 $a_1 = 1/2, a_2 = 3/4$ を代入して $A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3}$ を得る。したがって $a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n$ である。

(2)

左から k 番目の文字の直後がブロックの切れ目である確率を u_k とし、開始前も切れ目とみなして $u_0 = 1$ とする。 $k = 1$ では、最初のブロックが長さ 1 であればよいから $u_1 = \frac{1}{2}$ である。 $k \geq 2$ では、最初のブロックの長さにより $u_k = \frac{1}{2}u_{k-1} + \frac{1}{2}u_{k-2}$ である。よって $u_k = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k$ ($k \geq 0$) となる。

$n = 2$ のとき、1 番目が A 、2 番目が B となることはない。最初のブロックが AA なら 2 番目は A 、最初のブロックが長さ 1 なら 1 番目は A でないからである。

$n \geq 3$ とする。左から $n-1$ 番目が A 、 n 番目が B となるには、左から $n-3$ 番目の直後で切れ、その後に AA が書かれ、さらに次に B が書かれる必要がある。またこの条件は十分でもある。したがって求める確率は $u_{n-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}u_{n-3}$ である。ゆえに

$$\frac{1}{12}u_{n-3} = \frac{1}{12} \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-3} \right\} = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-3}$$

である。

以上より求める確率は

$$\begin{cases} 0 & (n=2), \\ \frac{1}{18} + \frac{1}{36} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-3} & (n \geq 3) \end{cases}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20 分。文系第 4 問と同型だが、(2) では B が指定されているため、最後の係数が $1/4$ ではなく $1/12$ になる。 AA と長さ 1 ブロックの確率がともに $1/2$ であることを見抜くと、(1) と境界確率の漸化式は同じ形になる。よくある誤りは、 AB を「 A の次が長さ 1 ブロック」とだけ考えて B, C, D の区別を落とすこと、また $n = 2$ を一般式に無理に含めてしまうことである。

【第 3 問】

a を正の実数とし、 p を正の有理数とする。

座標平面上の 2 つの曲線 $y = ax^p$ ($x > 0$) と $y = \log x$ ($x > 0$) を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであると、その共有点を Q とする。

以下の問いに答えよ。必要であれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい。

- (1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。
- (2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。
- (3) (2) で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

2 曲線の共有点が 1 点だけである条件を、 $F(x) = ax^p - \log x$ が最小値 0 をとる条件に直す。 $F'(x)$ の符号変化から接点の x 座標 q を決め、 $F(q) = F'(q) = 0$ で a, q を求める。囲まれる図形は $0 < x < 1$ では x 軸と $y = ax^p$ 、 $1 < x < q$ では $y = \log x$ と $y = ax^p$ に挟まれるため、回転体積は上側曲線の 2 乗積分から $\log x$ の 2 乗積分を引く。最後は体積式を整理して 2π と比較する。

【解答】

(1) $F(x) = ax^p - \log x$ ($x > 0$) とおく。 $a > 0, p > 0$ であるから、 $x \rightarrow +0$ のとき $-\log x \rightarrow +\infty$ より $F(x) \rightarrow +\infty$ である。また、問題文で与えられた極限から、 $x \rightarrow \infty$ のとき ax^p は $\log x$ より十分大きくなるので $F(x) \rightarrow +\infty$ である。

微分すると $F'(x) = apx^{p-1} - \frac{1}{x} = \frac{apx^p - 1}{x}$ である。 $x > 0$ では apx^p は 0 から ∞ まで単調に増えるので、 $F'(x) = 0$ となる点はただ 1 つである。したがって $F(x)$ はただ 1 つの最小値をもつ。

2 曲線の共有点が 1 点のみであるためには、この最小値がちょうど 0 でなければならない。共有点 Q の x 座標を q とすると $F(q) = 0$ 、 $F'(q) = 0$ である。すなわち $aq^p = \log q$ 、 $apq^p = 1$ である。後式より $aq^p = \frac{1}{p}$ であり、前式と比べて $\log q = \frac{1}{p}$ を得る。したがって $q = e^{1/p}$ である。また $aq^p = \frac{1}{p}$ 、 $q^p = e$ より $a = \frac{1}{pe}$ である。

(2) (1) より $y = ax^p = \frac{x^p}{pe}$ 、 $q = e^{1/p}$ である。 $F(x) \geq 0$ で等号は $x = q$ のみだから $\frac{x^p}{pe} \geq \log x$ が $x > 0$ で成り立つ。特に、 $0 < x < 1$ では $\log x < 0$ なので、囲まれる図形は x 軸と $y = \frac{x^p}{pe}$ の間にあり、 $1 \leq x \leq q$ では $y = \log x$ と $y = \frac{x^p}{pe}$ の間にある。

よって回転体の体積を V とすると

$$V = \pi \int_0^q \left(\frac{x^p}{pe} \right)^2 dx - \pi \int_1^q (\log x)^2 dx$$

である。

まず

$$\pi \int_0^q \left(\frac{x^p}{pe} \right)^2 dx = \frac{\pi}{p^2 e^2} \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^q = \frac{\pi q^{2p+1}}{p^2 e^2 (2p+1)}$$

である。 $q = e^{1/p}$ より $q^{2p+1} = e^{2+1/p}$ なので

$$\pi \int_0^q \left(\frac{x^p}{pe} \right)^2 dx = \frac{\pi e^{1/p}}{p^2 (2p+1)}$$

である。

次に、部分積分により

$$\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx = x\{(\log x)^2 - 2 \log x + 2\}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\int_1^q (\log x)^2 dx &= q\{(\log q)^2 - 2\log q + 2\} - 2 \\ &= e^{1/p} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2 \right) - 2\end{aligned}$$

である。

ゆえに

$$\begin{aligned}V &= \pi \left\{ \frac{e^{1/p}}{p^2(2p+1)} - e^{1/p} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2 \right) + 2 \right\} \\ &= \pi \left\{ 2 + e^{1/p} \left(\frac{1}{p^2(2p+1)} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} - 2 \right) \right\}\end{aligned}$$

である。括弧内を通分すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^2(2p+1)} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} - 2 &= \frac{1 - (2p+1) + 2p(2p+1) - 2p^2(2p+1)}{p^2(2p+1)} \\ &= \frac{2(1-2p)}{2p+1}\end{aligned}$$

である。したがって $V = 2\pi \left\{ 1 + \frac{(1-2p)e^{1/p}}{2p+1} \right\}$ である。

(3)

$V = 2\pi$ とすると、(2) の式から $\frac{(1-2p)e^{1/p}}{2p+1} = 0$ である。ここで $p > 0$ だから $e^{1/p} > 0$, $2p+1 > 0$ である。よって $1-2p=0$ であり $p = \frac{1}{2}$ を得る。

▶ 解法 2 (円筒殻による体積計算)

【方針】

(1) は差 $F(x) = ax^p - \log x$ の唯一の最小点が共有点になることから a と接点を求める。(2) では主解法の円板法と異なり、高さ y の水平な細長い部分を x 軸のまわりに回す円筒殻として積分する。2 曲線を x について解き、横幅を直接求める。

【解答】

(1)

$F(x) = ax^p - \log x$ ($x > 0$) とおくと

$$F'(x) = \frac{apx^p - 1}{x}$$

である。 apx^p は単調に増えるので F の極小点は 1 つだけである。また $x \rightarrow +0$ と $x \rightarrow \infty$ の両方で $F(x) \rightarrow +\infty$ だから、共有点が 1 点だけであるための条件は、その極小値が 0 となることである。

共有点の x 座標を q とすると

$$aq^p = \log q, \quad apq^p = 1$$

である。したがって

$$\log q = \frac{1}{p}, \quad q = e^{1/p}, \quad a = \frac{1}{pe}$$

となる。

(2)

共有点の高さは $1/p$ である。高さ y を固定すると、 $y = ax^p$ 上の点の x 座標は

$$x = (pey)^{1/p}$$

であり、 $y = \log x$ 上の点の x 座標は

$$x = e^y$$

である。したがって $0 \leq y \leq 1/p$ における領域の横幅は

$$e^y - (pey)^{1/p}$$

である。

この水平部分を x 軸のまわりに回すと、半径 y 、高さが上の横幅である薄い円筒殻になる。よって体積は

$$V = 2\pi \int_0^{1/p} y \left\{ e^y - (pey)^{1/p} \right\} dy$$

である。

第 1 項は

$$\int_0^{1/p} ye^y dy = [e^y(y-1)]_0^{1/p} = e^{1/p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) + 1$$

である。第 2 項は

$$\begin{aligned} \int_0^{1/p} y(pey)^{1/p} dy &= (pe)^{1/p} \left[\frac{y^{2+1/p}}{2+1/p} \right]_0^{1/p} \\ &= \frac{e^{1/p}}{p(2p+1)} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left\{ 1 + e^{1/p} \left(\frac{1-p}{p} - \frac{1}{p(2p+1)} \right) \right\} \\ &= 2\pi \left\{ 1 + \frac{(1-2p)e^{1/p}}{2p+1} \right\} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$V = 2\pi$ とすると

$$\frac{(1-2p)e^{1/p}}{2p+1} = 0$$

である。 $p > 0$ だから $e^{1/p} > 0$ かつ $2p+1 > 0$ であり

$$p = \frac{1}{2}$$

を得る。

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 30 分。接点条件、回転体積、対数を含む積分を処理する総合問題である。(1) では共有点 1 点を単に「接する」と言うだけでなく、 $F(x)$ がただ 1 つの最小値をもつことまで確認すると論証が安定する。第 1 解法は縦切りの円板法、第 2 解法は横切りの円筒殻を用い、独立な積分設定から同じ体積を再現した。円板法では $0 < x < 1$ の下側境界が x 軸になる点、円筒殻法では $0 \leq y \leq 1/p$ で横幅が $e^y - (pey)^{1/p}$ になる点が重要である。最後に 2π との差が $1-2p$ だけで決まる形まで整理する。

【第 4 問】

数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。
- (2) すべての $n = 2, 3, 4, \dots$ に対し, $p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。
- (3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $p_n = q_{2n-1}$ を示せ。

【方針】

まず与えられた漸化式を $p_n p_{n+2} = p_{n+1}^2 + 1$ と書き、全項が正であることを押さえる。(1) はこの関係を使って、指定された分数を隣の添字の同じ分数へ変形し、不変量であることを示す。(2) は不変量の値が初期値から 3 と分かるので、 $p_{n-1} p_{n+1} = p_n^2 + 1$ と組み合わせて線形漸化式 $p_{n+1} + p_{n-1} = 3p_n$ を得る。(3) は q_{2n-1} も同じ線形漸化式と初期値を持つことを示して一致させる。

【解答】

(1)

まず $p_1 = 1, p_2 = 2$ は正であり、 p_n, p_{n+1} が正なら $p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} > 0$ である。したがってすべての p_n は正で、以下の割り算は正当である。

与えられた漸化式は $p_n p_{n+2} = p_{n+1}^2 + 1$ と書ける。そこで $I_n = \frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ とおく。上の関係から $p_{n+1}^2 + 1 = p_n p_{n+2}$ であるため $I_n = \frac{p_n p_{n+2} + p_n^2}{p_{n+1}p_n} = \frac{p_{n+2} + p_n}{p_{n+1}}$ である。

一方、添字を 1 つ進めると $I_{n+1} = \frac{p_{n+2}^2 + p_{n+1}^2 + 1}{p_{n+2}p_{n+1}}$ である。ここで $p_{n+1}^2 + 1 = p_n p_{n+2}$ を再び用いれば

$$I_{n+1} = \frac{p_{n+2}^2 + p_n p_{n+2}}{p_{n+2}p_{n+1}} = \frac{p_{n+2} + p_n}{p_{n+1}}$$

となる。よって $I_{n+1} = I_n$ であり、 I_n は n によらない。

(2)

(1) の一定値は $n = 1$ を代入して $\frac{p_2^2 + p_1^2 + 1}{p_2 p_1} = \frac{4 + 1 + 1}{2} = 3$ である。したがって、 $n \geq 2$ に対して $\frac{p_n^2 + p_{n-1}^2 + 1}{p_n p_{n-1}} = 3$ すなわち $p_n^2 + p_{n-1}^2 + 1 = 3p_n p_{n-1}$ が成り立つ。

また、もとの漸化式で添字を $n - 1$ とすると $p_{n-1} p_{n+1} = p_n^2 + 1$ である。これを上の式へ代入すると $p_{n-1} p_{n+1} + p_{n-1}^2 = 3p_n p_{n-1}$ である。左辺をくくって $p_{n-1}(p_{n+1} + p_{n-1}) = 3p_n p_{n-1}$ となる。 $p_{n-1} > 0$ だから両辺を p_{n-1} で割ることができ、 $p_{n+1} + p_{n-1} = 3p_n$ を得る。

(3) $r_n = q_{2n-1}$ とおく。まず、数列 q_n について $q_{k+2} + q_{k-2} = 3q_k \quad (k \geq 3)$ が成り立つことを示す。実際、 $q_{k+1} = q_k + q_{k-1}$ より $q_{k+2} = q_{k+1} + q_k = 2q_k + q_{k-1}$ であり、また $q_k = q_{k-1} + q_{k-2}$ より $q_{k-2} = q_k - q_{k-1}$ である。したがって $q_{k+2} + q_{k-2} = 3q_k$ である。

これを $k = 2n - 1$ に適用すると、 $n \geq 2$ で $r_{n+1} + r_{n-1} = 3r_n$ が成り立つ。一方、(2) より p_n も $p_{n+1} + p_{n-1} = 3p_n \quad (n \geq 2)$ を満たす。

初期値を比べると $r_1 = q_1 = 1 = p_1$ であり、また $r_2 = q_3 = q_2 + q_1 = 2 = p_2$ である。 $p_{n+1} = 3p_n - p_{n-1}, r_{n+1} = 3r_n - r_{n-1}$ と書けるので、初期値 2 つが一致すれば数学的帰納法によりすべて一致する。よって $p_n = q_{2n-1}$ がすべての正の整数 n について成り立つ。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20 分。非線形漸化式を、不変量を通じて線形漸化式へ変換する問題である。(1) で $I_n = I_{n+1}$ を作る計算が山場で、ここを丁寧に書けると (2)(3) は自然に流れる。(2) では $p_{n-1} > 0$ を確認して割ること、

(3) では q_{2n-1} が満たす漸化式を添字を飛ばして導くことが採点点になる。誘導が強いので、各小問の結果を次に使う構成を崩さないことが重要である。

【第 5 問】

m を 2015 以下の正の整数とする。 ${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

${}_{2015}C_m$ を $\frac{2015 \cdot 2014 \cdots (2016 - m)}{m!}$ と書き、分子の因数 $2016 - j$ と分母の因数 j に含まれる 2 の個数を比較する。 $2016 = 2^5 \cdot 63$ なので、 $1 \leq j \leq 31$ では j と $2016 - j$ に含まれる 2 の個数が一致する。したがって $m \leq 31$ は奇数であり、 $m = 32$ で初めて分子側の 2 の個数が 1 つ多くなることを示す。

【解答】

$2016 = 32 \cdot 63 = 2^5 \cdot 63$ である。

$1 \leq j \leq 31$ とする。 j に含まれる因数 2 の個数を r とすると、 $j < 32$ だから $0 \leq r \leq 4$ であり $j = 2^r s$ と書ける。ただし s は奇数である。このとき $2016 - j = 2^r \left(\frac{2016}{2^r} - s \right)$ である。 $r \leq 4$ より $2016/2^r$ は偶数であり、 s は奇数なので $\frac{2016}{2^r} - s$ は奇数である。したがって、 $2016 - j$ に含まれる因数 2 の個数も r である。

$1 \leq m \leq 31$ のとき

$${}_{2015}C_m = \frac{2015 \cdot 2014 \cdots (2016 - m)}{m!} = \frac{(2016 - 1)(2016 - 2) \cdots (2016 - m)}{1 \cdot 2 \cdots m}$$

である。上で示したように、各 $j = 1, 2, \dots, m$ について、分子の因数 $2016 - j$ と分母の因数 j に含まれる因数 2 の個数は等しい。したがって分子全体と分母全体に含まれる因数 2 の個数も等しく、約分後に因数 2 は残らない。ゆえに ${}_{2015}C_m$ は奇数である。

次に $m = 32$ を調べる。 $j = 1, 2, \dots, 31$ に対応する部分では、先ほどと同様に因数 2 の個数は分子と分母で等しい。残る $j = 32$ に対しては $2016 - 32 = 1984 = 2^6 \cdot 31$ である。一方、分母側の因数は $32 = 2^5$ である。したがって $j = 32$ の部分で分子側に因数 2 が 1 個多く、全体として ${}_{2015}C_{32}$ は偶数である。

以上より、 ${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小の m は 32 である。

▶ 解法 2 (2 を法とする多項式)

【方針】

二項展開の係数を 2 で割った余りだけ考える。 $(1 + x)^{2^k}$ の中間係数がすべて偶数であることから、指数 2015 の 2 進表示を使って $(1 + x)^{2015}$ を 2 を法として因数分解する。係数が奇数になる次数を、選べる 2 の冪の和として判定する。

【解答】

多項式の係数を 2 で割った余りで考える。二項係数の対称性とパスカルの関係、または二項展開を繰り返すことにより、正の整数 k について

$$(1 + x)^{2^k} \equiv 1 + x^{2^k} \pmod{2}$$

が成り立つ。

2015 の 2 進表示は

$$2015 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

であり、32 の位だけが欠けている。したがって

$$\begin{aligned} (1 + x)^{2015} &\equiv (1 + x^{1024})(1 + x^{512})(1 + x^{256}) \\ &\quad \cdot (1 + x^{128})(1 + x^{64})(1 + x^{16})(1 + x^8) \\ &\quad \cdot (1 + x^4)(1 + x^2)(1 + x) \pmod{2} \end{aligned}$$

である。

右辺を展開すると、各因子から 1 または x^{2^j} を選ぶ。異なる選び方は 2 進表示の一意性により異なる次数を与えるので、ある次数 m の係数が奇数であるための必要十分条件は、 m の 2 進表示で 1 となる桁が、上に並んだ桁だけからなることである。

$1 \leq m \leq 31$ では使う桁は 1, 2, 4, 8, 16 だけであり、これらの因子はすべて存在する。よって

$${}_{2015}C_m \equiv 1 \pmod{2} \quad (1 \leq m \leq 31)$$

である。

一方、 $m = 32$ の 2 進表示は 100000 であり、必要な x^{32} の因子が存在しない。したがって

$${}_{2015}C_{32} \equiv 0 \pmod{2}$$

である。以上より、偶数となる最小の m は

$$32$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 4。目安時間は 15 分。二項係数の偶奇を扱う問題である。第 1 解法は分子と分母に含まれる 2 の個数を一つずつ比較し、第 2 解法は $(1+x)^{2015}$ を 2 を法として展開して 2 進表示から判定する。2015 ではなく $2016 = 2^5 \cdot 63$ 、または 2015 の 2 進表示で 32 の位だけが 0 であることに注目するのが決め手である。前者では $1984 = 2^6 \cdot 31$ と $32 = 2^5$ の差、後者では 2 進表示の一意性を明示すると、 $m = 32$ が最小であることがはっきりする。

【第 6 問】

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし、 p, q を実数とする。 $|x| \leq \frac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leq f(x) \leq q$ が成り立つとき、次の不等式を示せ。

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx$$

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $g(nx)$ が $|x| \leq 1/n$ にだけ現れる非負の重みであり、重みの総量が 1 であることを示して、重み付き平均として不等式を挟む。(2) では $|x| < 1$ で $g'(x) = h(x)$ かつ $g(\pm 1) = 0$ であることを使い、 $h(nx)$ を $g(nx)$ の微分に直して部分積分する。すると積分は $F'(x)$ の重み付き平均になり、(1) と F' の連続性から $F'(0)$ に収束する。最後に部分積分で生じる符号を確認する。

【解答】

(1)

定義より $g(x) \geq 0$ であり、 $g(nx) \neq 0$ となるのは $|nx| \leq 1$ すなわち $|x| \leq \frac{1}{n}$ のときだけである。また、 $t = nx$ とおくと

$$\begin{aligned} n \int_{-1}^1 g(nx) dx &= \int_{-n}^n g(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\cos(\pi t) + 1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi} + t \right]_{-1}^1 = 1 \end{aligned}$$

である。

仮定より、 $g(nx) \neq 0$ となる範囲では $p \leq f(x) \leq q$ が成り立つ。さらに $g(nx) \geq 0$ だから $pg(nx) \leq g(nx)f(x) \leq qg(nx)$ である。両辺を $[-1, 1]$ で積分し、さらに n を掛けると

$$pn \int_{-1}^1 g(nx) dx \leq n \int_{-1}^1 g(nx)f(x) dx \leq qn \int_{-1}^1 g(nx) dx$$

である。重みの総量が 1 であることから

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx)f(x) dx \leq q$$

を得る。

(2) $F(x) = \log(1 + e^{x+1})$ とおく。 $|x| < 1$ では $g'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) = h(x)$ であり、また $g(-1) = g(1) = 0$ である。さらに $g(nx)$ は $|x| \leq 1/n$ の外で 0 であるから、部分積分で端点項は出ない。

実際、 $\{g(nx)\}' = ng'(nx) = nh(nx)$ なので $h(nx) = \frac{1}{n}\{g(nx)\}'$ である。したがって

$$\begin{aligned} n^2 \int_{-1}^1 h(nx)F(x) dx &= n \int_{-1}^1 \{g(nx)\}' F(x) dx \\ &= n [g(nx)F(x)]_{-1}^1 - n \int_{-1}^1 g(nx)F'(x) dx \\ &= -n \int_{-1}^1 g(nx)F'(x) dx \end{aligned}$$

である。

ここで $F'(x) = \frac{e^{x+1}}{1 + e^{x+1}}$ であり、これは連続関数である。特に $F'(0) = \frac{e}{1 + e}$ である。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 F' の連続性より、十分小さい $\delta > 0$ を取れば $|x| \leq \delta$ で $F'(0) - \varepsilon \leq F'(x) \leq F'(0) + \varepsilon$ が成り立つ。十分大きい n では $1/n \leq \delta$ であるから、(1) を $f(x) = F'(x)$ 、 $p = F'(0) - \varepsilon$ 、 $q = F'(0) + \varepsilon$ に適用できる。よって

$$F'(0) - \varepsilon \leq n \int_{-1}^1 g(nx)F'(x) dx \leq F'(0) + \varepsilon$$

となる。したがって

$$n \int_{-1}^1 g(nx)F'(x) dx \rightarrow F'(0) = \frac{e}{1 + e}$$

である。

以上より、求める極限は部分積分で付いた負号に注意して $-\frac{e}{1 + e}$ である。

▶ 解法 2 (変数変換と平均値の定理)

【方針】

(1) は重み $ng(nx)$ の非負性と総量 1 から示す。(2) では部分積分を使わず、最初に $t = nx$ と変数変換する。 h が奇関数で積分が 0 であることを利用して定数項を消し、平均値の定理で $n\{F(t/n) - F(0)\}$ を $tF'(0)$ へ一様に近づける。

【解答】

(1)

$g(nx)$ は非負で、 $|x| \leq 1/n$ の外では 0 である。また $t = nx$ とおけば

$$n \int_{-1}^1 g(nx) dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(\pi t) + 1}{2} dt = 1$$

である。したがって、 $g(nx)$ が 0 でない範囲で成り立つ $p \leq f(x) \leq q$ に非負量 $ng(nx)$ を掛けて積分すれば

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx)f(x) dx \leq q$$

を得る。

(2)

$$F(x) = \log(1 + e^{x+1})$$

とおき、求める式を I_n とする。 $t = nx$ と変数変換し、 $h(t) = 0$ となる部分を除くと

$$I_n = n \int_{-1}^1 h(t) F\left(\frac{t}{n}\right) dt$$

である。 h は奇関数なので

$$\int_{-1}^1 h(t) dt = 0$$

である。よって

$$I_n = \int_{-1}^1 h(t) n \left\{ F\left(\frac{t}{n}\right) - F(0) \right\} dt \quad (1)$$

と書ける。

平均値の定理により、各 $t \in [-1, 1]$ に対して 0 と t/n の間の数 $\xi_{n,t}$ が存在し

$$n \left\{ F\left(\frac{t}{n}\right) - F(0) \right\} = t F'(\xi_{n,t})$$

となる。 $|\xi_{n,t}| \leq 1/n$ であり F' は 0 で連続だから、右辺は $t F'(0) \rightarrow -1 \leq t \leq 1$ で一様に近づく。したがって (1) から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = F'(0) \int_{-1}^1 t h(t) dt$$

である。

ここで

$$F'(0) = \frac{e}{1+e}$$

であり、部分積分により

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 t h(t) dt &= -\frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 t \sin(\pi t) dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \left[-\frac{t \cos(\pi t)}{\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi^2} \right]_{-1}^1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

である。ゆえに求める極限は

$$-\frac{e}{1+e}$$

となる。

【総評】 難度 8、計算量 6。目安時間は 30 分。抽象的な重み関数を使って、局所的な平均が関数値へ近づくことを示す問題である。(1) では $g(nx)$ の台が $|x| \leq 1/n$ に縮むこと、総量が 1 であることを両方書く必要がある。第 1 解法は $h = g'$ に気づいて部分積分し、(1) を F' に適用する。第 2 解法は $t = nx$ の後に h の奇性で定数項を消し、平均値の定理から一次近似を厳密化する。前者では $\{g(nx)\}' = nh(nx)$ の係数と負号、後者では

$$\int t h(t) dt = -1$$

の符号が重要である。独立な 2 経路で同じ極限を確認した。