

東京大学 2016 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

e を自然対数の底, すなわち $e = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

▶ 解法 1

【方針】

両側とも正の数の不等式なので, 対数を取って $x \log(1 + 1/x) < 1 < (x + 1/2) \log(1 + 1/x)$ を示す。左側は $u > 0$ で $\log(1 + u) < u$ を微分により示す。右側は $\log(1 + u) > 2u/(u + 2)$ を, 同じく差の導関数が正であることから示し, $u = 1/x$ を代入する。テイラー展開やロピタルは使わず, 単調性だけで完結させる。

【解答】

すべての量は正なので, 対数を取って示す。すなわち $(1 + \frac{1}{x})^x < e$ は $x \log(1 + \frac{1}{x}) < 1$ と同値であり, $e < (1 + \frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}$ は $1 < (x + \frac{1}{2}) \log(1 + \frac{1}{x})$ と同値である。

まず $u > 0$ に対して $\phi(u) = u - \log(1 + u)$ とおく。すると $\phi'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u} > 0$ であり, $\phi(0) = 0$ である。したがって $u > 0$ で $\phi(u) > 0$ すなわち $\log(1 + u) < u$ である。ここで $u = 1/x$ とすると $\log(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$ であるから $x \log(1 + \frac{1}{x}) < 1$ である。よって $(1 + \frac{1}{x})^x < e$ が成り立つ。

次に $u > 0$ に対して $\psi(u) = \log(1 + u) - \frac{2u}{u+2}$ とおく。すると

$$\begin{aligned} \psi'(u) &= \frac{1}{1+u} - \frac{4}{(u+2)^2} \\ &= \frac{(u+2)^2 - 4(1+u)}{(1+u)(u+2)^2} \\ &= \frac{u^2}{(1+u)(u+2)^2} > 0 \end{aligned}$$

であり, $\psi(0) = 0$ である。したがって $u > 0$ で $\log(1 + u) > \frac{2u}{u+2}$ である。 $u = 1/x$ とすると

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 2} = \frac{2}{2x+1}$$

である。よって

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \left(x + \frac{1}{2}\right) \frac{2}{2x+1} = 1$$

である。したがって $e < (1 + \frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}$ も成り立つ。

以上より, すべての正の実数 x に対して $(1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}$ である。

別解。右側の評価は, $\log(1 + u)$ を直接近似するのではなく, $2u/(u + 2)$ との差を見るのが要点である。左側・右側ともに「差を作って微分し, 0 から増加する」とそろえると, 証明全体が同じ型でまとまる。

▶ 解法 2

【方針】

$u = 1/x$ とおき、対数を定積分

$$\log(1+u) = \int_0^u (1+t)^{-1} dt$$

として評価する。上側評価は被積分関数が 1 未満であることから得る。下側評価は区間の両端から等距離の 2 点を組にし、その逆数和を相加相乗平均で抑える。

【解答】

$u = 1/x > 0$ とおく。対数の定積分表示から

$$\log(1+u) = \int_0^u \frac{dt}{1+t}.$$

$0 < t < u$ では $1/(1+t) < 1$ だから

$$\log(1+u) < u.$$

したがって $x \log(1+1/x) < 1$ であり、

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e.$$

次に積分区間を中央で折り返すと

$$\log(1+u) = \int_0^{u/2} \left\{ \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+u-t} \right\} dt.$$

正の 2 数の逆数和について

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

であるから、 $a = 1+t, b = 1+u-t$ とすれば

$$\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+u-t} \geq \frac{4}{u+2}.$$

等号は $t = u/2$ の 1 点だけなので、積分すれば不等号は厳密になり、

$$\log(1+u) > \frac{2u}{u+2}.$$

$u = 1/x$ を戻すと

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1,$$

したがって

$$e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/2}.$$

以上より、求める二重不等式が成り立つ。

【総評】 難度 6, 計算量 4。目安時間は 18 分。自然対数を取って指数の不等式を対数の不等式に直すのが第一歩である。 $\log(1+u) < u$ は標準だが、右側の $\log(1+u) > 2u/(u+2)$ を自分で作れるかが差になる。どちらも差の微分が正であることから高校範囲で証明できる。 $u = 1/x$ を代入した後、 $(x+1/2) \cdot 2/(2x+1) = 1$ となる形を見落とさないことが重要である。

【第 2 問】

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い、2 連勝したチームが出た時点で、そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

- (a) 1 試合目で A と B が対戦する。
- (b) 2 試合目で、1 試合目の勝者と、1 試合目で待機していた C が対戦する。
- (c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は、 k 試合目の勝者と、 k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお、すべての対戦において、それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で、引き分けはないものとする。

- (1) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
- (2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき、A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は文科第 2 問と同じく、優勝が決まるまでは勝者列が 3 チームの巡回になることを使う。初戦の勝者が A か B かで、A が 2 連勝できる時刻が $n \equiv 2$ または $n \equiv 1 \pmod{3}$ に分かれる。(2) は条件付き確率として、分母に $3m$ 試合以下で A が優勝する確率、分子にそのうち最後の相手が B である確率を置く。最後の相手が B になるのは $n = 4, 7, \dots, 3m-2$ のときである。

【解答】

(1) 優勝が決まる前は、連続する 2 試合の勝者は同じではない。したがって勝者列は 3 チームを巡回する形に限られる。

1 試合目で A が勝つ場合、優勝が決まるまでは $A, C, B, A, C, B, \dots$ と勝者が並ぶ。この場合、 $(n-1)$ 試合目の勝者が A で、 n 試合目も A が勝つと、A がちょうど n 試合目で優勝する。これは $n \equiv 2 \pmod{3}$ のときである。

1 試合目で B が勝つ場合、優勝が決まるまでは $B, C, A, B, C, A, \dots$ と勝者が並ぶ。この場合、 $(n-1)$ 試合目の勝者が A となるのは $n \equiv 1 \pmod{3}$ のときである。

したがって、A がちょうど n 試合目で優勝する確率は

$$\begin{cases} 2^{-n} & (n \equiv 1, 2 \pmod{3}), \\ 0 & (n \equiv 0 \pmod{3}) \end{cases}$$

である。

(2) まず、総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求める。(1) より該当する時刻は $2, 5, 8, \dots, 3m-1$ および $4, 7, 10, \dots, 3m-2$ である。したがって分母に当たる確率は $\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2^{3j+2}} + \sum_{j=0}^{m-2} \frac{1}{2^{3j+4}}$ であり、これは $\frac{5 \cdot 8^m - 12}{14 \cdot 8^m}$ である。

次に、A の最後の対戦相手が B である場合を数える。初戦で B が勝つ巡回 $B, C, A, B, C, A, \dots$ では、A が優勝する直前の試合で A が勝ったとき、次の試合の相手は待機していた B である。したがって最後の相手が B となるのは $n = 4, 7, 10, \dots, 3m-2$ のときである。よって分子に当たる確率は

$$\sum_{j=0}^{m-2} \frac{1}{2^{3j+4}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - 8^{-(m-1)}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{14} (1 - 8^{-(m-1)})$$

である。 $m=1$ のときはこの和は空で、右辺も 0 になる。

したがって求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{14} (1 - 8^{-(m-1)})}{\frac{5 \cdot 8^m - 12}{14 \cdot 8^m}} = \frac{8^m - 8}{5 \cdot 8^m - 12}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

A がちょうど n 試合目に優勝する確率 p_n に対して、非決着の巡回を 3 試合延ばす漸化式 $p_{n+3} = p_n/8$ を使う。初期値から (1) を確定し、(2) では $n \equiv 1 \pmod{3}$ の系列だけが最後に B と当たることを状態の並びから判定する。

【解答】

A がちょうど n 試合目に優勝する確率を p_n とする。優勝前の勝者は 3 チームを巡回するため、同じ状態へ 3 試合後に戻る。その 3 試合の結果は一意で、確率は $1/8$ だから

$$p_{n+3} = \frac{1}{8}p_n.$$

初期値は

$$p_2 = \frac{1}{4}, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = \frac{1}{16}.$$

(1) よって

$$p_n = \begin{cases} 2^{-n} & (n \equiv 1, 2 \pmod{3}), \\ 0 & (n \equiv 0 \pmod{3}). \end{cases}$$

(2) 初戦を B が勝った状態から続く列は $B, C, A, B, C, A, \dots$ である。この系列で A が 2 連勝するとき、最後の相手は待機していた B である。したがって該当する優勝時刻は

$$n = 4, 7, \dots, 3m - 2.$$

分子は

$$\sum_{j=0}^{m-2} \frac{1}{2^{3j+4}} = \frac{1}{14} \left(1 - 8^{-(m-1)} \right).$$

一方、条件となる『 $3m$ 試合以下で A が優勝』の確率は

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2^{3j+2}} + \sum_{j=0}^{m-2} \frac{1}{2^{3j+4}} = \frac{5 \cdot 8^m - 12}{14 \cdot 8^m}.$$

したがって条件付き確率は

$$\frac{8^m - 8}{5 \cdot 8^m - 12}.$$

$m = 1$ では分子が 0 となり、この式とも一致する。

【総評】 難度 6, 計算量 5。目安時間は 22 分。文科第 2 問と同じ勝者列の巡回構造を使うが、最後の対戦相手まで追う分だけ慎重が必要である。A の優勝時刻は 3 で割った余りが 1 または 2 の場合に限られ、そのうち最後の相手が B になるのは $4, 7, 10, \dots$ の列だけである。条件付き確率では、分母を「 $3m$ 試合以下で A が優勝」として作り直すこと。 $m = 1$ で分子が 0 になることも式で自然に確認できる。

【第 3 問】

a を $1 < a < 3$ をみたす実数とし、座標空間内の 4 点 $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(1, 0, 3)$, $Q(0, 0, a)$ を考える。直線 P_1Q , P_2Q , P_3Q と xy 平面の交点をそれぞれ R_1, R_2, R_3 として、三角形 $R_1R_2R_3$ の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を最小にする a と、そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

直線 QP_i を $Q + \lambda(P_i - Q)$ と表し、 $z = 0$ となる λ を求める。 R_1, R_2 は同じ x 座標で、 R_1, R_3 は x 軸上にあるため、三角形の底辺と高さがすぐ読める。面積 $S(a)$ は正の有理式 $a^2/((a-1)^2(3-a))$ になり、 $1 < a < 3$ で微分して増減を調べる。端点付近で面積が大きくなることも確認して、 $a = 2$ が最小であると結論する。

【解答】

直線 QP_i 上の点を $Q + \lambda(P_i - Q)$ と表す。

まず $P_1(1, 0, 1)$ について考える。直線 QP_1 上の点は $(0, 0, a) + \lambda(1, 0, 1 - a) = (\lambda, 0, a + \lambda(1 - a))$ である。これが xy 平面上にあるには $z = 0$ であればよいので $a + \lambda(1 - a) = 0$ である。 $1 < a < 3$ より $a \neq 1$ だから $\lambda = \frac{a}{a-1}$ である。したがって $R_1 = \left(\frac{a}{a-1}, 0, 0\right)$ である。

同様に $P_2(1, 1, 1)$ については $R_2 = \left(\frac{a}{a-1}, \frac{a}{a-1}, 0\right)$ である。

次に $P_3(1, 0, 3)$ については、直線上の点が $(0, 0, a) + \lambda(1, 0, 3 - a)$ であるから、 $z = 0$ の条件は $a + \lambda(3 - a) = 0$ である。 $a < 3$ より $\lambda = \frac{a}{a-3}$ であり、 $R_3 = \left(\frac{a}{a-3}, 0, 0\right)$ である。 R_1R_2 は y 軸方向の線分で、その長さは $\frac{a}{a-1}$ である。また R_1, R_3 はいずれも x 軸上にあり、 $1 < a < 3$ では $\frac{a}{a-1} > 0$, $\frac{a}{a-3} < 0$ なので $R_1R_3 = \frac{a}{a-1} - \frac{a}{a-3} = \frac{2a}{(a-1)(3-a)}$ である。よって

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a-1} \cdot \frac{2a}{(a-1)(3-a)} = \frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$$

である。 $S(a) > 0$ なので、符号を見やすくするために $\frac{S'(a)}{S(a)} = \frac{2}{a} - \frac{2}{a-1} + \frac{1}{3-a}$ を計算する。整理すると $\frac{S'(a)}{S(a)} = \frac{(a-2)(a+3)}{a(a-1)(3-a)}$ である。 $1 < a < 3$ では分母と $a+3$ は正なので、 $S'(a)$ の符号は $a-2$ の符号と同じである。

したがって $S(a)$ は $1 < a < 2$ で減少し、 $2 < a < 3$ で増加する。よって最小となるのは $a = 2$ のときであり、その値は $S(2) = \frac{2^2}{(2-1)^2(3-2)} = 4$ である。

別解。 R_1, R_2, R_3 の配置を見ると、三角形の面積は射影による拡大率の積としても読める。 $z = 0$ への延長倍率が、 P_1, P_2 方向では $a/(a-1)$, P_3 方向では $a/(a-3)$ となるため、結局同じ有理式の最小化に帰着する。

▶ 解法 2

【方針】

直線と xy 平面の交点を求めて面積の式を作るところまでは共通だが、最小化には微分を使わない。 $S(a) \geq 4$ を分母が正であることに注意して多項式不等式へ直し、差を因数分解して等号条件を読む。

【解答】

直線 QP_i を媒介変数で表して $z = 0$ とすると

$$R_1 = \left(\frac{a}{a-1}, 0, 0 \right), \quad R_2 = \left(\frac{a}{a-1}, \frac{a}{a-1}, 0 \right), \quad R_3 = \left(\frac{a}{a-3}, 0, 0 \right).$$

したがって、底辺と高さから

$$S(a) = \frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}.$$

$1 < a < 3$ では分母が正である。ここで

$$\begin{aligned} a^2 - 4(a-1)^2(3-a) &= (a-2)^2(4a-3) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

である。よって

$$S(a) \geq 4.$$

範囲内では $4a-3 > 0$ なので、等号が成り立つのは $a=2$ のときに限る。したがって $S(a)$ を最小にするのは $a=2$ 、最小値は 4 である。

【総評】 難度 5、計算量 5。目安時間は 18 分。空間図形だが、直線と xy 平面の交点を媒介変数で出せば、あとは平面上の面積問題である。 $a/(a-3)$ は負になるため、 R_3 が x 軸の負側にあることを確認すると底辺の長さを誤りにくい。微分では $S(a) > 0$ を使って S'/S を計算すると整理が軽くなる。端点 $a=1, 3$ は範囲外で、近づくとも面積が大きくなるため、増減表から $a=2$ の最小が確定する。

【第 4 問】

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $A(1), B(z), C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め、図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

$z = X + Yi$ とおき、3 点 $A(1), B(z), C(z^2)$ の各頂点での内積が正である条件を計算する。複素数平面では、ベクトル u, v の内積は $\operatorname{Re}(u\bar{v})$ で表せる。 A, B, C の順に計算すると、条件は $X > -1, X < 0, |z|^2 + X > 0$ となる。したがって、縦帯 $-1 < X < 0$ のうち、中心 $(-1/2, 0)$ 、半径 $1/2$ の円の外部を図示する。

【解答】

$z = X + Yi$ とおく。複素数平面で、複素数 u, v が表す 2 つのベクトルの内積は $\operatorname{Re}(u\bar{v})$ で表せる。

まず頂点 A での条件を調べる。 A から B, C へ向かうベクトルは $z-1, z^2-1 = (z-1)(z+1)$ である。したがって内積は

$$\operatorname{Re}\{(z-1)\overline{(z-1)(z+1)}\} = |z-1|^2 \operatorname{Re}(\overline{z+1}) = |z-1|^2(X+1)$$

である。鋭角条件はこれが正であることなので $X > -1$ である。

次に頂点 B での条件を調べる。 B から A, C へ向かうベクトルは $1-z, z^2-z = z(z-1)$ である。内積は

$$\operatorname{Re}\{(1-z)\overline{z(z-1)}\} = \operatorname{Re}\{-|z-1|^2\bar{z}\} = -|z-1|^2X$$

である。したがって $X < 0$ である。

最後に頂点 C での条件を調べる。 C から A, B へ向かうベクトルは $1-z^2 = (1-z)(1+z), z-z^2 = z(1-z)$ である。内積は

$$\operatorname{Re}\{(1-z)(1+z)\overline{z(1-z)}\} = |1-z|^2 \operatorname{Re}\{(1+z)\bar{z}\}$$

である。ここで

$$\operatorname{Re}\{(1+z)\bar{z}\} = \operatorname{Re}(\bar{z} + z\bar{z}) = X + |z|^2$$

なので、条件は $|z|^2 + X > 0$ である。

以上を合わせると $-1 < X < 0$, $X^2 + Y^2 + X > 0$ である。後半は $(X + \frac{1}{2})^2 + Y^2 > \frac{1}{4}$ と書ける。

したがって求める範囲は、縦帯 $-1 < X < 0$ のうち、中心 $(-1/2, 0)$ 、半径 $1/2$ の円の外部である。ただし、境界は鋭角でなく直角または点の一致に対応するため含まない。

別解。各頂点での直角条件を先に曲線として求めることもできる。 A と B での直角条件はそれぞれ直線 $X = -1$, $X = 0$ となり、 C での直角条件は円 $(X + 1/2)^2 + Y^2 = 1/4$ となる。鋭角側を代表点で判定すれば、同じ領域が得られる。

▶ 解法 2

【方針】

3 辺を $|z - 1|$, $|z||z - 1|$, $|z + 1||z - 1|$ と因数分解して求め、鋭角三角形の必要十分条件『各辺の 2 乗が他の 2 辺の 2 乗和より小さい』を使う。共通因子 $|z - 1|^2$ を消去すると、2 直線と 1 円の不等式が直接得られる。

【解答】

$z = X + Yi$ とおく。3 辺の長さは

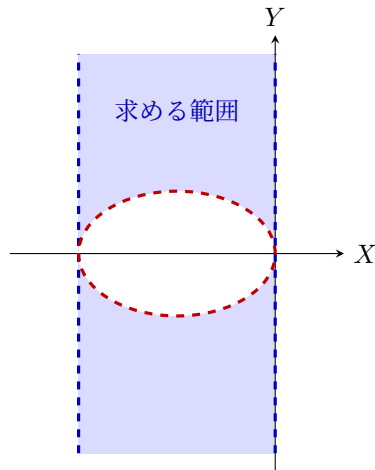
$$AB = |z - 1|, \quad BC = |z||z - 1|, \quad CA = |z + 1||z - 1|.$$

点が一致する場合は鋭角三角形にならないので、以下では $|z - 1| > 0$ として共通因子を消去できる。各辺の 2 乗が他の 2 辺の 2 乗和より小さい条件を順に使うと

$$\begin{aligned} CA^2 < AB^2 + BC^2 &\iff |z + 1|^2 < 1 + |z|^2 \iff X < 0, \\ BC^2 < CA^2 + AB^2 &\iff |z|^2 < |z + 1|^2 + 1 \iff X > -1, \\ AB^2 < BC^2 + CA^2 &\iff 1 < |z|^2 + |z + 1|^2 \iff X^2 + Y^2 + X > 0. \end{aligned}$$

したがって

$$-1 < X < 0, \quad \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 > \frac{1}{4}.$$



縦帯の境界と円周はいずれも含まない。

【総評】 難度 6, 計算量 5。目安時間は 22 分。複素数平面の問題だが、本質は 3 頂点での内積条件である。 $z^2 - z = z(z - 1)$, $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$ と因数分解すると、 $|z - 1|^2$ が共通因子として出て計算が短くなる。最終図示は縦帯 $-1 < X < 0$ から小円の内部を除く形で、境界を含まない。 $z = 0, 1, -1$ などの点の一致は条件から自然に除かれるが、図では境界除外を明示したい。

【第 5 問】

k を正の整数とし、10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで、 $a_1, a_2, \dots, a_k$ は 0 から 9 までの整数で、 $a_k \neq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2) p が $5 \cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば、次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し、 $r \leq x < r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。 $\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

▶ 解法 1
【方針】

$N = 10^k$, $A = a_110^{k-1} + \cdots + a_k$ とおき、小数を A/N で表す。 $a_k \neq 0$ より $1 \leq A \leq N-1$ である。(1) は平方して n の入る半開区間を作り、左端と右端の小数部分を評価して整数を 2 つに絞る。(2) も同じ半開区間を考え、長さが 1 より大きいことから整数の存在を示す。(3) は存在を仮定して $N\sqrt{s} = Nr + A$ を平方し、 $N^2 \mid (Nr + A)^2$ から $N \mid A$ を導いて矛盾させる。

【解答】

$N = 10^k$, $A = a_110^{k-1} + a_210^{k-2} + \cdots + a_k$ とおく。このとき $0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{A}{N}$ である。 $a_k \neq 0$ なので $1 \leq A \leq N-1$ である。

(1) 与えられた不等式は $\frac{A}{N} \leq \sqrt{n} - N < \frac{A+1}{N}$ と書ける。したがって $N + \frac{A}{N} \leq \sqrt{n} < N + \frac{A+1}{N}$ である。両辺は正なので平方して $\left(N + \frac{A}{N}\right)^2 \leq n < \left(N + \frac{A+1}{N}\right)^2$ を得る。

左端は $\left(N + \frac{A}{N}\right)^2 = N^2 + 2A + \frac{A^2}{N^2}$ である。 $1 \leq A \leq N-1$ より $0 < \frac{A^2}{N^2} < 1$ だから、左端以上の最小の整数は $N^2 + 2A + 1$ である。

右端は $\left(N + \frac{A+1}{N}\right)^2 = N^2 + 2A + 2 + \frac{(A+1)^2}{N^2}$ である。ここで $0 < \frac{(A+1)^2}{N^2} \leq 1$ である。したがって右端末満の整数は、多くても $N^2 + 2A + 1$, $N^2 + 2A + 2$ までであり、実際にこれら 2 つは区間に入る。よって求める正の整数 n は $n = N^2 + 2A + 1$, $n = N^2 + 2A + 2$ である。

(2) 同様に、求める m は半開区間

$$\left[\left(p + \frac{A}{N}\right)^2, \left(p + \frac{A+1}{N}\right)^2 \right)$$

に含まれる整数であればよい。この区間の長さは

$$\left(p + \frac{A+1}{N}\right)^2 - \left(p + \frac{A}{N}\right)^2 = \frac{2p}{N} + \frac{2A+1}{N^2}$$

である。

仮定より $p \geq 5 \cdot 10^{k-1} = \frac{N}{2}$ なので $\frac{2p}{N} \geq 1$ である。また $(2A+1)/N^2 > 0$ だから、区間の長さは 1 より大きい。

任意の半開区間 $[\alpha, \beta)$ で $\beta - \alpha > 1$ なら、 $[\alpha] < \alpha + 1 < \beta$ なので、その中に整数が少なくとも 1 つ存在する。したがって上の半開区間にも整数が存在する。その整数を m とすれば、求める不等式を満たす。

(3) 条件を満たす正の整数 s が存在すると仮定する。 $r = [\sqrt{s}]$ とおくと、仮定は $\sqrt{s} - r = \frac{A}{N}$ を意味する。したがって $\sqrt{s} = r + \frac{A}{N}$ であり、両辺に N を掛けて $N\sqrt{s} = Nr + A$ を得る。さらに平方すると $N^2s = (Nr + A)^2$ である。

左辺は N^2 で割り切れるので、 $(Nr + A)^2$ も N^2 で割り切れる。 $N = 10^k = 2^k 5^k$ であるから、平方数 $(Nr + A)^2$ が $2^{2k} 5^{2k}$ で割り切れるなら、 $Nr + A$ は $2^k 5^k = N$ で割り切れる。よって $Nr + A \equiv 0 \pmod{N}$ である。ところが Nr は N で割り切れるから $A \equiv 0 \pmod{N}$ となる。

しかし $1 \leq A \leq N - 1$ なので、 A は N で割り切れない。これは矛盾である。したがって $\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1 a_2 \cdots a_k$ を満たす正の整数 s は存在しない。

▶ 解法 2

【方針】

小数を A/N とする点は同じだが、不等式全体を N 倍してから平方し、『長さ N^2 ごとに並ぶ N^2 の倍数が、連続平方数 $q^2, (q+1)^2$ の間に入るか』という整数問題へ翻訳する。(2) は区間長 $2q+1$ を N^2 と比較する。

【解答】

$N = 10^k$, $A = a_1 10^{k-1} + \cdots + a_k$ とおく。すると $1 \leq A \leq N - 1$ である。

(1) 与えられた不等式を N 倍し、正のまま平方すると

$$(N^2 + A)^2 \leq N^2 n < (N^2 + A + 1)^2.$$

両端を N^2 で割れば

$$N^2 + 2A + \frac{A^2}{N^2} \leq n < N^2 + 2A + 2 + \frac{(A+1)^2}{N^2}.$$

ここで $0 < A^2/N^2 < 1$, $0 < (A+1)^2/N^2 \leq 1$ だから、整数解は

$$n = N^2 + 2A + 1, \quad N^2 + 2A + 2.$$

(2) $q = pN + A$ とおく。求める条件は

$$q^2 \leq N^2 m < (q+1)^2$$

である。区間 $[q^2, (q+1)^2)$ の長さは $2q+1$ である。仮定から

$$q \geq pN \geq \frac{N^2}{2}$$

なので $2q+1 > N^2$ である。 N^2 の倍数は間隔 N^2 で並ぶから、長さが N^2 より大きい半開区間には必ずその倍数が 1 つ以上入る。これを $N^2 m$ とすれば、所要の正整数 m が得られる。

(3) 条件を満たす s があると仮定し、 $r = [\sqrt{s}]$ とおくと

$$N\sqrt{s} = Nr + A$$

は整数である。平方して $(Nr + A)^2 = N^2 s$ だから、素因数 2 と 5 の指数を比較すれば $N \mid (Nr + A)$ である。よって $N \mid A$ となるが、 $1 \leq A \leq N - 1$ に矛盾する。したがってそのような s は存在しない。

【総評】 難度 8, 計算量 7. 目安時間は 32 分。小数を A/N に置き換えて、平方根の条件を整数が入る半開区間に直すことが核心である。(1) では左端が整数より少し大きく、右端は最大でも次の整数ちょうどまでしか行かないため、2 個だけが残る。(2) は区間の長さが 1 より大きいことから整数の存在を保証するが、半開区間なので $\lceil \alpha \rceil$ を使う説明が安全である。(3) は $N^2 \mid (Nr + A)^2$ から $N \mid (Nr + A)$ を出す割り切りが山場で、最後に $1 \leq A \leq N - 1$ と矛盾させる。

【第 6 問】

座標空間内を、長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a), (b) を満たしながら動く。

- (a) 点 A は平面 $z = 0$ 上にある。
- (b) 点 $C(0, 0, 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき、線分 AB が通過することのできる範囲を K とする。 K と不等式 $z \geq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

点 C を基準にし、 $z \geq 1$ 側の点の高さを $h = z - 1$ 、 C からの水平距離を ρ 、 C からその点までの距離を s とおく。その点を通る線分を C の反対側へ延長して平面 $z = 0$ に届くまでの距離は、相似から s/h である。線分全体の長さが 2 なので、 $s + s/h \leq 2$ が通過条件になる。これを ρ, h の不等式に直し、高さ h での円断面の面積を積分する。

【解答】

点 $C(0, 0, 1)$ を基準にして考える。 $z \geq 1$ 側の点を取り、その点の C からの高さを $h = z - 1$ ($h \geq 0$) とする。また、その点の C からの水平方向の距離を ρ とする。すると、その点と C との距離 s は $s = \sqrt{\rho^2 + h^2}$ である。

まず $h > 0$ として考える。この点が線分 AB 上にあるとする。線分は C を通り、反対側へ延長すると点 A を含む平面 $z = 0$ に達する。 C から上側の点までの距離が s 、その鉛直方向の増加が h であるから、この直線上で鉛直方向に 1 だけ下って平面 $z = 0$ に達するまでの距離は、相似により $\frac{s}{h}$ である。

線分 AB の長さは 2 であり、 C はその線分上にある。したがって、上側に距離 s だけ進み、反対側に平面 $z = 0$ まで距離 s/h だけ進むことができるための条件は $s + \frac{s}{h} \leq 2$ である。すなわち $s \leq \frac{2h}{h+1}$ である。

これを ρ, h で書くと $\rho^2 + h^2 \leq \frac{4h^2}{(h+1)^2}$ であり、 $\rho^2 \leq \frac{4h^2}{(h+1)^2} - h^2 = \frac{h^2(1-h)(h+3)}{(h+1)^2}$ である。

右辺が 0 以上でなければ断面は存在しない。 $h \geq 0$ では $h^2 \geq 0$, $h+3 > 0$, $(h+1)^2 > 0$ なので、必要十分条件は $0 \leq h \leq 1$ である。 $h = 0$ では断面は点 C だけで、体積には影響しない。

したがって、高さ h における断面は半径の 2 乗が $\frac{h^2(1-h)(h+3)}{(h+1)^2}$ である円であり、その面積は $\pi \frac{h^2(1-h)(h+3)}{(h+1)^2}$ である。よって求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^1 \frac{h^2(1-h)(h+3)}{(h+1)^2} dh$$

である。

被積分関数を整理すると $\frac{h^2(1-h)(h+3)}{(h+1)^2} = -h^2 + 4 - \frac{8}{h+1} + \frac{4}{(h+1)^2}$ である。したがって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{h^2(1-h)(h+3)}{(h+1)^2} dh &= \left[-\frac{h^3}{3} + 4h - 8 \log(h+1) - \frac{4}{h+1} \right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 4 - 8 \log 2 - 2 \right) - (-4) \\ &= \frac{17}{3} - 8 \log 2 \end{aligned}$$

である。よって求める体積は $\pi \left(\frac{17}{3} - 8 \log 2 \right)$ である。

別解。通過条件は、線分の向きを単位ベクトルで置いても導ける。鉛直成分が h/s である方向に、平面 $z = 0$ まで戻る距離が s/h となるので、結局 $s + s/h \leq 2$ に帰着する。断面を円として積分する点は同じである。

▶ 解法 2

【方針】

$q = AC$ を線分上の位置を表す変数にする。A と C の高さの差が 1 なので、線分方向の鉛直成分は $1/q$ である。高さ $1+h$ の点までの距離と水平方向距離を q, h で表し、 $AC + CP \leq 2$ から許される q の最大値を求める。回転対称性で円断面を得て積分する。

【解答】

$q = AC$ とおく。A から C までに高さが 1 増えるので、線分方向の単位ベクトルの鉛直成分は $1/q$ であり、 $q \geq 1$ である。高さ $z = 1+h$ にある線分上の点を P とする。C から P までの鉛直増加が h だから

$$CP = qh.$$

P が長さ 2 の線分内にある条件は

$$AC + CP = q(1+h) \leq 2.$$

したがって

$$1 \leq q \leq \frac{2}{1+h}.$$

この範囲が空でないための条件は $0 \leq h \leq 1$ である。

線分方向の水平成分の大きさは $\sqrt{1-1/q^2}$ なので、C から P までの水平距離は

$$\rho = qh\sqrt{1-\frac{1}{q^2}} = h\sqrt{q^2-1}.$$

これは q とともに増加する。線分は鉛直軸の周りに任意の方向を向けるから、高さ $1+h$ の断面は円であり、半径の 2 乗は

$$\rho_{\max}^2 = h^2 \left\{ \frac{4}{(1+h)^2} - 1 \right\} = \frac{h^2(1-h)(h+3)}{(h+1)^2}.$$

よって体積は

$$V = \pi \int_0^1 \frac{h^2(1-h)(h+3)}{(h+1)^2} dh.$$

被積分関数を

$$-h^2 + 4 - \frac{8}{h+1} + \frac{4}{(h+1)^2}$$

と分解すれば

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[-\frac{h^3}{3} + 4h - 8\log(h+1) - \frac{4}{h+1} \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{17}{3} - 8\log 2 \right). \end{aligned}$$

【総評】 難度 8, 計算量 7. 目安時間は 35 分。線分が動く空間領域を直接描くのは難しいため、高さごとの断面で見るのが有効である。C から上側の点までの距離 s と、反対側へ延長して平面 $z = 0$ に届くまでの距離 s/h を相似で出せるかが核心である。条件 $s + s/h \leq 2$ から断面半径が決まり、 $0 \leq h \leq 1$ だけを積分する。最後の有理式分解と対数項の計算も重いので、原始関数を明記して符号ミスを防ぎたい。