

入 学 試 験 問 題



数 学

東 京 大 学 2018 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり、

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pi - 0} f(x)$$

を求めよ。

第 2 問

数列 $a_1, a_2, \dots$ を

$$a_n = \frac{{}^{2n+1}C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。

(1) $n \geq 2$ とする。

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を既約分数 q_n/p_n として表したときの、分母 $p_n \geq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ。

第 3 問

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考え、 $k > 0$ とする。

点 P が C 上を動き、点 Q が線分 OA 上を動くとき、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{k} \overrightarrow{OP} + k \overrightarrow{OQ}$$

を満たす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$$S(k), \quad \lim_{k \rightarrow +0} S(k), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$$

を求めよ。

第 4 問

$a > 0$ とし、

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。次の 2 条件を満たす点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件 1 : 方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2 : その解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

第 5 問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $P(z)$ は C 上にあり、点 $A(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して、点 A と対称な点を $Q(u)$ とする。

$$w = \frac{1}{1-u}$$

とおき、 w と共役な複素数を $\bar{w}$ で表す。

(1) u と

$$\frac{\bar{w}}{w}$$

を z についての整式として表し、

$$\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|}$$

を求めよ。

(2) C のうち実部が $1/2$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $P(z)$ が C' 上を動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ。

第 6 問

座標空間内の 4 点

$$O(0,0,0), \quad A(1,0,0), \quad B(1,1,0), \quad C(1,1,1)$$

を考える。

$$\frac{1}{2} < r < 1$$

とする。点 P が線分 OA, AB, BC 上を動くとき、点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を、それぞれ V_1, V_2, V_3 とする。

(1) 平面 $y = t$ が V_1, V_3 の双方と共有点をもつような t の範囲を求めよ。さらに、この範囲の t に対し、平面 $y = t$ と V_1 の共通部分、および平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための、 r についての条件を求めよ。

(3) r は (2) の条件を満たすとする。 V_1 の体積を S 、 V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。 V_1, V_2, V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S, T を用いて表せ。

(4) 引き続き r は (2) の条件を満たすとする。 S, T を求め、 V の体積を決定せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)