

東京大学 2018 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり、

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x)$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

微分して $f'(x)$ を $\cos x$ と $x - \sin x \cos x$ の積に整理する。後者が正であることを、その導関数から示す。すると $f'(x)$ の符号は $-\cos x$ の符号だけで決まる。端点の極限は、左端では基本極限 $\sin x/x \rightarrow 1$ 、右端では $\sin x \rightarrow +0$ を使う。

【解答】

$0 < x < \pi$ では $\sin x > 0$ である。微分して整理すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} - \sin x \\ &= \frac{\cos x (\sin x \cos x - x)}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

ここで

$$g(x) = x - \sin x \cos x$$

とおくと

$$g'(x) = 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x > 0 \quad (0 < x < \pi).$$

また $g(0) = 0$ なので $g(x) > 0$ である。したがって $\sin x \cos x - x < 0$ であり、 $f'(x)$ の符号は $-\cos x$ の符号と一致する。さらに

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

よって増減表は

x	$+0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - 0$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	2	$\searrow$	$\nearrow$
		$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$

となる。

左端では

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\sin x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1$$

だから

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 2.$$

右端では $x \rightarrow \pi > 0$ 、 $\sin x \rightarrow +0$ 、 $\cos x \rightarrow -1$ なので

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = +\infty.$$

▶ 解法 2

【方針】

導関数を $\sin 2x - 2x$ を含む形に変形し、基本不等式 $\sin u < u$ ($u > 0$) からその符号を一度に決める。極限は $y = \pi - x$ と置き換え、右端も $y \rightarrow +0$ の形に統一する。

【解答】

導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x}{\sin^2 x} (\sin x \cos x - x) \\ &= \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} (\sin 2x - 2x). \end{aligned}$$

$0 < x < \pi$ では $2x > 0$ であり、 $\sin u < u$ ($u > 0$) より

$$\sin 2x - 2x < 0.$$

したがって

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \\ f'(x) = 0 & \left(x = \frac{\pi}{2}\right), \\ f'(x) > 0 & \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right). \end{cases}$$

ゆえに f は $x = \pi/2$ で最小値 $\pi/2$ をとる。

左端の極限は

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x}{\sin x} + \cos x \right) = 1 + 1 = 2.$$

右端では $y = \pi - x$ とおくと $y \rightarrow +0$ であり、

$$f(\pi - y) = \frac{\pi - y}{\sin y} - \cos y.$$

第 1 項は $+\infty$ 、第 2 項は -1 に近づくから

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = +\infty.$$

【総評】 難度 4、目安時間 15 分。微分後の式をそのまま眺めず、 $\cos x$ と常に負の因子へ分解するのが要点である。 $x - \sin x \cos x > 0$ は再微分でも $\sin 2x < 2x$ でも確認できる。増減表には区間、導関数の符号、中央の値、両端の極限をそろえて記す。右端では $\sin x \rightarrow 0$ だけでなく、区間内から近づくため $\sin x \rightarrow +0$ であることが重要である。

【第 2 問】

数列 $a_1, a_2, \dots$ を

$$a_n = \frac{2n+1 C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。

(1) $n \geq 2$ とする。

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を既約分数 q_n/p_n として表したときの、分母 $p_n \geq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

隣接比を階乗で展開し、まず $2(2n+1)/\{n(n+1)\}$ を得る。既約分数が問われているので、 $2n+1$ が n 、 $n+1$ のどちらとも互いに素であることを示し、偶数因子 2 だけを約分する。(2) は隣接比が 1 未満となる $n \geq 4$ 以降の単調減少と $a_8 < 1$ を使って大きい n を除き、残る項を直接確認する。

【解答】

(1)

$n \geq 2$ とする。階乗表示を使うと

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{{}_{2n+1}C_n}{n!} \frac{(n-1)!}{{}_{2n-1}C_{n-1}} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

ここで

$$\gcd(2n+1, n) = 1, \quad \gcd(2n+1, n+1) = 1$$

である。実際、共通約数はそれぞれ

$$(2n+1) - 2n = 1, \quad 2(n+1) - (2n+1) = 1$$

も割る。したがって約分できる因子は、連続 2 整数の積 $n(n+1)$ に含まれる因子 2 だけである。よって

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n+1}{n(n+1)/2} = \frac{q_n}{p_n},$$

したがって

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad q_n = 2n+1.$$

(2)

約分前の隣接比から

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \iff n^2 - 3n - 2 > 0.$$

正の根 $(3 + \sqrt{17})/2$ は 3 と 4 の間にあるため、整数 $n \geq 2$ では $n \geq 4$ のとき $a_n < a_{n-1}$ である。

直接計算すると

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	5	$\frac{35}{6}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{77}{20}$	$\frac{143}{60}$	$\frac{143}{112}$	$\frac{2431}{4032}$

である。 $a_8 < 1$ であり、 $n \geq 4$ では単調減少するから、 $n \geq 8$ の項はすべて $0 < a_n < 1$ である。表と合わせて、整数となるのは

$$n = 1, 2$$

だけである。

▶ 解法 2

【方針】

(1) で得た既約な漸化式 $a_n = (q_n/p_n)a_{n-1}$ を積の形で繰り返す。すべての $q_n = 2n + 1$ は奇数である一方、 $p_3 = 6$ は因子 2 をもつ。この 2 は分子側から消せないで、 $n \geq 3$ の a_n は整数にならない。大小比較を使わず、2 の因子だけで一括して判定する。

【解答】

(1)

隣接比は

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n(n+1)/2}.$$

$2n+1$ は n と $n+1$ と互いに素なので、右辺は既約である。したがって

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad q_n = 2n+1.$$

(2)

$n \geq 2$ に対し

$$a_n = a_1 \frac{q_2 q_3 \cdots q_n}{p_2 p_3 \cdots p_n}.$$

ここで

$$a_1 = 3, \quad q_k = 2k+1$$

はいずれも奇数である。一方、

$$p_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

は因子 2 をもつ。したがって $n \geq 3$ では、上の分数の分母側にある因子 2 を分子側のどの因子でも約分できない。よって a_n は整数ではない。

最後に

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5$$

はいずれも整数であるから、答えは

$$n = 1, 2$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 25 分。(1) は隣接比を出すだけでなく、既約性の証明までが設問である。 $2n+1$ と $n, n+1$ の最大公約数を差で 1 に落とすと短い。(2) には、単調減少して 1 未満へ入ることを使う解析的な方法と、既約漸化式の分母に現れる因子 2 を追う整数論的な方法がある。後者では、すべての分子が奇数であるため p_3 の因子 2 が永久に消えない、という一点を明記する。

【第 3 問】

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考え、 $k > 0$ とする。

点 P が C 上を動き、点 Q が線分 OA 上を動くとき、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ}$$

を満たす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$$S(k), \quad \lim_{k \rightarrow +0} S(k), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$P = (t, t^2)$ 、 $Q = (u, 0)$ とおくと $R = (t/k + ku, t^2/k)$ である。高さ Y を固定し、 $s = \sqrt{kY}$ とおくと、 $t = \pm s$ から長さ k の横区間が 2 本現れる。重なり条件 $s \leq k^2/2$ と $0 \leq s \leq 1$ を比較すると、 $k = \sqrt{2}$ を境に領域の形が変わる。各高さの横幅を積分して面積を求める。

【解答】

$P = (t, t^2)$ 、 $Q = (u, 0)$ とおく。ただし

$$-1 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

$R = (X, Y)$ とすると

$$X = \frac{t}{k} + ku, \quad Y = \frac{t^2}{k}.$$

高さ Y を固定し、

$$s = \sqrt{kY}$$

とおくと $t = \pm s$ 、 $0 \leq s \leq 1$ である。したがって X の範囲は

$$\left[-\frac{s}{k}, -\frac{s}{k} + k\right] \cup \left[\frac{s}{k}, \frac{s}{k} + k\right].$$

2 区間が重なる条件は

$$\frac{s}{k} \leq -\frac{s}{k} + k \iff s \leq \frac{k^2}{2}.$$

まず $k \geq \sqrt{2}$ とする。このとき $k^2/2 \geq 1$ なので、全高さで 2 区間が重なる。横幅は

$$k + \frac{2\sqrt{kY}}{k}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^{1/k} \left(k + \frac{2\sqrt{kY}}{k} \right) dY \\ &= 1 + \frac{4}{3k^2}. \end{aligned}$$

次に $0 < k < \sqrt{2}$ とする。2 区間が重なるのは

$$0 \leq Y \leq \frac{k^3}{4}$$

である。この範囲の横幅は $k + 2\sqrt{kY}/k$ 、それより上では 2 区間が分かれ、横幅の和は $2k$ となる。よって

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^{k^3/4} \left(k + \frac{2\sqrt{kY}}{k} \right) dY \\ &\quad + \int_{k^3/4}^{1/k} 2k dY \\ &= 2 - \frac{k^4}{12}. \end{aligned}$$

したがって

$$S(k) = \begin{cases} 2 - \frac{k^4}{12} & (0 < k < \sqrt{2}), \\ 1 + \frac{4}{3k^2} & (k \geq \sqrt{2}). \end{cases}$$

$k = \sqrt{2}$ では両式とも $5/3$ となる。また

$$\lim_{k \rightarrow +0} S(k) = 2, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = 1.$$



▶ 解法 2

【方針】

$t \geq 0$ と $t \leq 0$ から生じる 2 領域を別々に見る。各領域は横幅 k 、高さ $1/k$ なので面積 1 である。したがって全体の面積は 2 から重なりの方面積を引けばよい。重なり幅を高さ Y の式で表し、場合ごとに積分する。

【解答】

$t \geq 0$ から生じる領域を E_+ 、 $t \leq 0$ から生じる領域を E_- とする。各高さで横幅は k 、高さの範囲は $0 \leq Y \leq 1/k$ だから

$$|E_+| = |E_-| = \int_0^{1/k} k dY = 1.$$

よって

$$S(k) = 2 - |E_+ \cap E_-|.$$

$s = \sqrt{kY}$ とすると、重なり幅は

$$k - \frac{2s}{k} = k - \frac{2\sqrt{kY}}{k}.$$

$0 < k < \sqrt{2}$ では、重なりは $0 \leq Y \leq k^3/4$ に限られるので

$$\begin{aligned} |E_+ \cap E_-| &= \int_0^{k^3/4} \left(k - \frac{2\sqrt{kY}}{k} \right) dY \\ &= \frac{k^4}{12}. \end{aligned}$$

したがって

$$S(k) = 2 - \frac{k^4}{12}.$$

$k \geq \sqrt{2}$ では全高で重なるため

$$\begin{aligned} |E_+ \cap E_-| &= \int_0^{1/k} \left(k - \frac{2\sqrt{kY}}{k} \right) dY \\ &= 1 - \frac{4}{3k^2}. \end{aligned}$$

よって

$$S(k) = 1 + \frac{4}{3k^2}.$$

以上から極限も

$$\lim_{k \rightarrow +0} S(k) = 2, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = 1$$

と分かる。

【総評】 難度 7、目安時間 30 分。領域は、縮尺 $1/k$ の放物線弧を水平方向へ長さ k だけ掃いたものと解釈できる。高さを固定すると 2 本の横区間になり、その重なり条件が $s \leq k^2/2$ である。 s の最大値が 1 なので、場合分けの境目は $k = \sqrt{2}$ となる。積分はすべて横幅と積分区間を別行で示し、低い部分の重なりを数え落とさない。直接横幅を足す方法と、面積 2 から重なりを引く方法で相互検算できる。

【第 4 問】

$a > 0$ とし、

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。次の 2 条件を満たす点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：その解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

▶ 解法 1

【方針】

導関数 $f'(x) = 3(x^2 - a^2)$ から極大値 $2a^3$ 、極小値 $-2a^3$ を求め、3 実数解の条件を水平線 $y = b$ の位置として読む。中央の解 β は減少区間 $(-a, a)$ 上にあるので、 $\beta > 1$ を $a > 1$ と $b < f(1)$ に直す。最後に境界曲線の上下関係を確認して領域を図示する。

【解答】

$$f'(x) = 3(x^2 - a^2).$$

よって増減表は

x	$-\infty$	$-a$	a	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

となる。したがって $f(x) = b$ が相異なる 3 実数解をもつ条件は

$$-2a^3 < b < 2a^3.$$

中央の解 β は減少区間 $(-a, a)$ にある。 $\beta > 1$ が可能であるためには $a > 1$ が必要である。このとき f は 1 を含む区間 $(-a, a)$ で減少するから

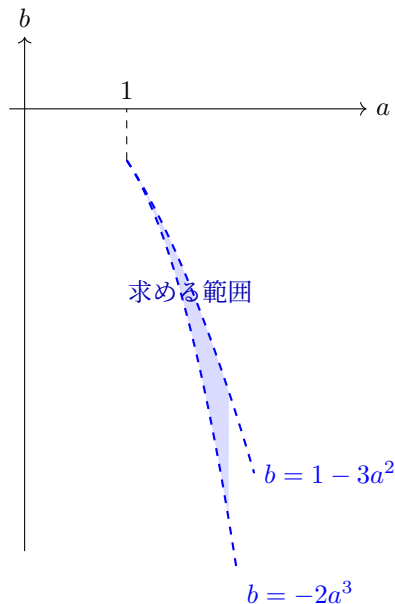
$$\beta > 1 \iff f(\beta) < f(1) \iff b < 1 - 3a^2.$$

また $a > 1$ では

$$(1 - 3a^2) - (-2a^3) = (a - 1)^2(2a + 1) > 0$$

かつ $1 - 3a^2 < 2a^3$ である。したがって求める範囲は

$$a > 1, \quad -2a^3 < b < 1 - 3a^2.$$



▶ 解法 2

【方針】

中央の解を $\beta = t$ とおく。中央の解が属する減少区間と $\beta > 1$ から $1 < t < a$ を得る。固定した $a > 1$ に対して $b = f(t)$ の値域を求め、逆向きも確認することで必要十分条件を直接導く。

【解答】

中央の解を $\beta = t$ とおく。中央の解は極大点と極小点の間にあるため

$$-a < t < a.$$

さらに $t > 1$ なので、このような t が存在するには

$$a > 1, \quad 1 < t < a$$

が必要である。

固定した $a > 1$ に対し、 f は区間 $(1, a)$ で狭義単調減少する。よって t がこの区間を動くと

$$f(a) < f(t) < f(1).$$

$b = f(t)$ だから

$$-2a^3 < b < 1 - 3a^2.$$

逆に $a > 1$ かつこの不等式を満たす b をとる。減少区間 $(1, a)$ に $f(t) = b$ を満たす点 t がただ 1 つ存在し、さらに水平線 $y = b$ は極小値と極大値の間にあるので、その左右にも 1 つずつ交点をもつ。したがって条件 1、2 の両方を満たす。よって答えは

$$a > 1, \quad -2a^3 < b < 1 - 3a^2$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 20 分。文系第 3 問 (2) と共通の問題である。極大・極小から 3 実数解の条件を出した後、中央の解が減少区間にあることを使う。 $\beta > 1$ なら $a > 1$ が必要であり、減少性のため $\beta > 1$ は $b < f(1)$ に対応する。境界上では重解または $\beta = 1$ となるため、2 本の境界曲線と直線 $a = 1$ はいずれも含まれない。

【第 5 問】

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $P(z)$ は C 上にあり、点 $A(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して、点 A と対称な点を $Q(u)$ とする。

$$w = \frac{1}{1-u}$$

とおき、 w と共役な複素数を $\bar{w}$ で表す。

(1) u と

$$\frac{\bar{w}}{w}$$

を z についての整式として表し、

$$\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|}$$

を求めよ。

(2) C のうち実部が $1/2$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $P(z)$ が C' 上を動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

単位円上の点 z における接線を $\operatorname{Re}(X\bar{z}) = 1$ と表す。法線方向 z に沿って点 1 を対称移動し、 $u = 2z - z^2$ を得る。すると $1 - u = (1 - z)^2$ となり、 $\bar{z} = 1/z$ を使って $\bar{w}/w$ と絶対値の商を求められる。(2) は $w = X + Yi$ とおき、(1) の絶対値関係を放物線の方程式へ変え、 $\operatorname{Re} z \leq 1/2$ から範囲を絞る。

【解答】

(1)

$|z| = 1$ である。点 $P(z)$ における接線は

$$\operatorname{Re}(X\bar{z}) = 1$$

で表され、その法線方向は z である。点 1 をこの直線に関して対称移動すると

$$u = 1 + 2\{1 - \operatorname{Re} z\}z.$$

また $|z| = 1$ より

$$2\operatorname{Re} z = z + \frac{1}{z}$$

だから

$$u = 1 + 2z - z\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2z - z^2.$$

したがって

$$1 - u = (1 - z)^2, \quad w = \frac{1}{(1 - z)^2}.$$

$\bar{z} = 1/z$ を用いると

$$\bar{w} = \frac{1}{(1 - \bar{z})^2} = \frac{z^2}{(1 - z)^2},$$

よって

$$\frac{\bar{w}}{w} = z^2.$$

さらに

$$\begin{aligned} w + \bar{w} - 1 &= \frac{1 + z^2 - (1 - z)^2}{(1 - z)^2} \\ &= \frac{2z}{(1 - z)^2} = 2zw. \end{aligned}$$

$|z| = 1$ なので

$$\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|} = 2.$$

(2)

$w = X + Yi$ とおく。(1) より

$$|2X - 1| = 2\sqrt{X^2 + Y^2}.$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$Y^2 = \frac{1}{4} - X.$$

範囲を求める。 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくと

$$w = \frac{-\cos \theta + i \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)},$$

したがって

$$X = -\frac{\cos \theta}{2(1 - \cos \theta)}.$$

$c = \cos \theta$ に対する関数

$$-\frac{c}{2(1 - c)}$$

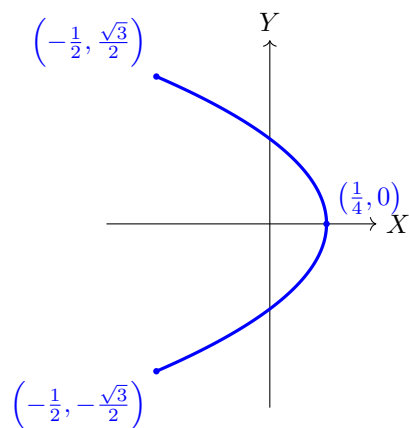
は $-1 \leq c \leq 1/2$ で減少するから

$$-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}.$$

よって軌跡は

$$Y^2 = \frac{1}{4} - X, \quad -\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}$$

で表される放物線の部分である。



▶ 解法 2

【方針】

$z = x + yi$ として接線 $xX + yY = 1$ に関する点 $(1, 0)$ の対称移動を座標公式で求める。(2) では半角変数 $t = \cot(\theta/2)$ を使うと、 w の実部・虚部が $X = (1 - t^2)/4$ 、 $Y = t/2$ となる。円弧の条件も $t^2 \leq 3$ へ直ちに変わる。

【解答】

(1)

$z = x + yi$ とおくと $x^2 + y^2 = 1$ であり、点 P における接線は

$$xX + yY = 1$$

である。点 $A = (1, 0)$ からこの直線への法線方向の符号つきずれは $x - 1$ なので、対称点は

$$Q = (1, 0) - 2(x - 1)(x, y).$$

これを複素数で書けば

$$u = 1 + 2(1 - x)z.$$

$2x = z + \bar{z} = z + 1/z$ を使うと

$$u = 2z - z^2.$$

以下、

$$w = \frac{1}{(1 - z)^2}, \quad \bar{w} = z^2, \quad w + \bar{w} - 1 = 2zw$$

となるから、求める商は 2 である。

(2)

$z = e^{i\theta}$ とし、

$$t = \cot \frac{\theta}{2}$$

とおく。半角公式より

$$\cos \theta = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

$w = 1/(1 - z)^2$ の実部、虚部を整理すると

$$X = \frac{1 - t^2}{4}, \quad Y = \frac{t}{2}.$$

したがって媒介変数 t を消去して

$$X = \frac{1}{4} - Y^2.$$

また $\operatorname{Re} z = \cos \theta \leq 1/2$ は

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \iff t^2 \leq 3$$

と同値である。よって

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq Y \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

すなわち

$$Y^2 = \frac{1}{4} - X, \quad -\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}$$

を得る。

【総評】 難度 7、目安時間 30 分。接線に関する対称移動を複素数のまま扱えるかが最初の山である。単位円上では $\bar{z} = 1/z$ が使えるため、 $1 - u = (1 - z)^2$ の形まで整理すると計算が急に短くなる。(2) の絶対値関係は放物線 $Y^2 = 1/4 - X$ を与えるが、それだけでは円弧 C' による範囲制限が抜けている。端点 $\operatorname{Re} z = 1/2$ と $z = -1$ を代入し、図の 3 端点まで確認する。

【第 6 問】

座標空間内の 4 点

$$O(0,0,0), \quad A(1,0,0), \quad B(1,1,0), \quad C(1,1,1)$$

を考える。

$$\frac{1}{2} < r < 1$$

とする。点 P が線分 OA, AB, BC 上を動くとき、点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を、それぞれ V_1, V_2, V_3 とする。

(1) 平面 $y = t$ が V_1, V_3 の双方と共有点をもつような t の範囲を求めよ。さらに、この範囲の t に対し、平面 $y = t$ と V_1 の共通部分、および平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための、 r についての条件を求めよ。

(3) r は (2) の条件を満たすとする。 V_1 の体積を S 、 V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。 V_1, V_2, V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S, T を用いて表せ。

(4) 引き続き r は (2) の条件を満たすとする。 S, T を求め、 V の体積を決定せよ。

▶ 解法 1

【方針】

V_1, V_2, V_3 を、それぞれ線分 OA, AB, BC から距離 r 以下の点全体とみなす。(1) は平面 $y = t$ で切り、半径 $\rho_1 = \sqrt{r^2 - t^2}$ 、 $\rho_3 = \sqrt{r^2 - (1-t)^2}$ の 2 つのカプセル形断面を描く。(2) は断面内で $V_1 \cap V_3$ の点から $(1, 0)$ までの最大距離を求める。(3) は包含関係により包除原理を簡単にする。(4) は 1 本の管の体積 S と、直交する 2 本の管の共通体積 T を角点まわりの象限に分けて計算する。

【解答】

(1)

V_1 は線分 OA から距離 r 以下の点全体である。したがって平面 $y = t$ が V_1 と共有点をもつ条件は

$$|t| \leq r.$$

同様に、線分 BC は平面 $y = 1$ 上にあるから、平面 $y = t$ が V_3 と共有点をもつ条件は

$$|t - 1| \leq r.$$

$\frac{1}{2} < r < 1$ より、双方と共有点をもつ範囲は

$$1 - r \leq t \leq r.$$

この範囲の t を固定し、平面 $y = t$ 上を (x, z) 平面とみなす。

$$\rho_1 = \sqrt{r^2 - t^2}, \quad \rho_3 = \sqrt{r^2 - (1-t)^2}$$

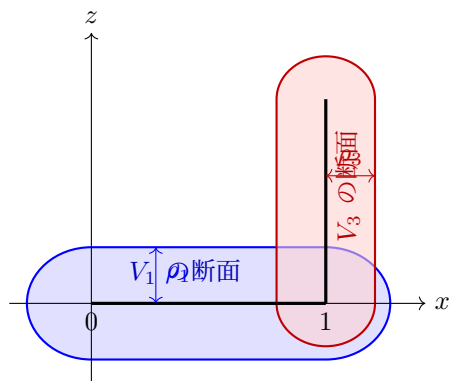
とおく。 V_1 の断面は線分

$$0 \leq x \leq 1, \quad z = 0$$

から距離 ρ_1 以下のカプセル形である。 V_3 の断面は線分

$$x = 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

から距離 ρ_3 以下のカプセル形である。



(2)

$1-r \leq t \leq r$ では $0 < t < 1$ である。したがって平面 $y = t$ と V_2 の共通部分は、 (x, z) 平面上の中心 $(1, 0)$ 、半径 r の円板である。

$$X = 1 - x$$

とおく。 $V_1 \cap V_3$ がこの円板からはみ出す可能性があるのは $X \geq 0, z \geq 0$ の角の内側である。そこでは

$$z^2 \leq r^2 - t^2, \quad X^2 \leq r^2 - (1-t)^2.$$

したがって中心 $(1, 0)$ からの距離の 2 乗 $X^2 + z^2$ の最大値は

$$2r^2 - t^2 - (1-t)^2.$$

これが r^2 以下となる条件は

$$r^2 \leq t^2 + (1-t)^2.$$

この不等式が $1-r \leq t \leq r$ のすべてで成り立つ必要がある。右辺は $t = 1/2$ で最小値 $1/2$ をとり、 $1/2$ はこの区間に含まれる。よって必要十分条件は

$$r^2 \leq \frac{1}{2}.$$

もとの範囲と合わせて

$$\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。

(3)

3 つの立体は合同なので、それぞれの体積は S である。また

$$\text{Vol}(V_1 \cap V_2) = \text{Vol}(V_2 \cap V_3) = T.$$

包除原理より

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= 3S - \text{Vol}(V_1 \cap V_2) - \text{Vol}(V_2 \cap V_3) \\ &\quad - \text{Vol}(V_1 \cap V_3) + \text{Vol}(V_1 \cap V_2 \cap V_3). \end{aligned}$$

(2) の条件のもとでは $V_1 \cap V_3 \subset V_2$ だから、最後の 2 項は打ち消し合う。したがって

$$\text{Vol}(V) = 3S - 2T.$$

(4)

V_1 は長さ 1、半径 r の円柱と、両端の半球 2 個からなる。よって

$$S = \pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3.$$

次に T を求める。点 A を原点とし、 AO 方向を u 軸、 AB 方向を v 軸、それらに垂直な方向を z 軸とする。 $u, v \geq 0$ の部分では

$$v^2 + z^2 \leq r^2, \quad u^2 + z^2 \leq r^2.$$

この部分の体積は、正方形 $0 \leq u, v \leq r$ を対角線で二分して

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^r \int_0^u 2\sqrt{r^2 - u^2} \, dv \, du \\ &= 4 \int_0^r u\sqrt{r^2 - u^2} \, du = \frac{4}{3}r^3. \end{aligned}$$

残る 3 象限では、共通部分は点 A を中心とする半径 r の球の 4 分の 3 に当たる。その体積は

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^3.$$

したがって

$$T = \left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3.$$

(3) に代入すると

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= 3 \left(\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3\right) - 2 \left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3 \\ &= 3\pi r^2 + \left(2\pi - \frac{8}{3}\right)r^3. \end{aligned}$$

▶ 解法 2

【方針】

各立体を線分への距離不等式で表し、(1)(2) を座標的に処理する。(4) の共通体積 T は、2 重積分ではなく z を固定した断面積で求める。高さ z で $h = \sqrt{r^2 - z^2}$ とおくと、断面は第 1 象限の正方形と残り 3 象限の円板部分に分かれ、1 変数積分だけで計算できる。

【解答】

(1)

平面 $y = t$ から線分 OA までの最短距離は $|t|$ 、線分 BC までの最短距離は $|1 - t|$ である。したがって

$$|t| \leq r, \quad |1 - t| \leq r.$$

両方を満たす範囲は

$$1 - r \leq t \leq r.$$

断面は、それぞれ長さ 1 の水平線分、垂直線分を半径

$$\sqrt{r^2 - t^2}, \quad \sqrt{r^2 - (1 - t)^2}$$

だけ太らせた図形である。

(2)

$0 < t < 1$ では、点 (x, t, z) から線分 AB までの距離は

$$\sqrt{(x - 1)^2 + z^2}.$$

$V_1 \cap V_3$ においてその 2 乗が最も大きくなる角では

$$(x - 1)^2 + z^2 = \{r^2 - (1 - t)^2\} + \{r^2 - t^2\}.$$

これが r^2 以下である条件は

$$r^2 \leq t^2 + (1 - t)^2.$$

右辺の区間 $[1 - r, r]$ における最小値は $t = 1/2$ での $1/2$ なので

$$\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(3)

$V_1 \cap V_3 \subset V_2$ により

$$V_1 \cap V_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3.$$

包除原理でこの 2 項が相殺されるから

$$\text{Vol}(V) = 3S - 2T.$$

(4)

1 本の線分の半径 r 近傍は、円柱と球 1 個分の端部をもつので

$$S = \pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3.$$

T を別の断面で求める。点 A を原点とする (u, v, z) 座標を解法 1 と同様にとり、 z を固定する。

$$h = \sqrt{r^2 - z^2}$$

とおく。この断面で $u, v \geq 0$ の部分は一辺 h の正方形となる。残り 3 象限の部分は半径 h の円板の 4 分の 3 となる。したがって断面積は

$$h^2 + \frac{3\pi}{4}h^2 = \left(1 + \frac{3\pi}{4}\right)(r^2 - z^2).$$

よって

$$\begin{aligned} T &= \int_{-r}^r \left(1 + \frac{3\pi}{4}\right)(r^2 - z^2) dz \\ &= \left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3. \end{aligned}$$

以上から

$$\text{Vol}(V) = 3\pi r^2 + \left(2\pi - \frac{8}{3}\right)r^3.$$

【総評】 難度 9、目安時間 40 分。3 本の折れ線状の線分を半径 r だけ太らせた立体を扱う。(1) では平面 $y = t$ 上の断面が、線分の両端に半円を付けたカプセル形になることを図で明示する。(2) の核心は、2 つの断面の重なりから中心 $(1, 0)$ までの最大距離を求め、 $t = 1/2$ が最も厳しいと見抜くこと。(3) は $V_1 \cap V_3 \subset V_2$ により包除原理の遠い交差項が相殺される。(4) の T は、象限分解による 2 重積分と、高さ z ごとの「正方形 + 4 分の 3 円板」の断面積分の 2 通りで一致する。積分式はすべて別行に置き、積分範囲と断面の意味を対応させる。