

東京大学 2019 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

▶ 解法 1

【方針】

被積分関数は一見複雑だが、積のまま工夫するよりも展開して基本積分に分けるのが確実である。現れる積分は x^2 、 $x(1+x^2)^{-1/2}$ 、 $x^3(1+x^2)^{-3/2}$ 、 $x^2(1+x^2)^{-2}$ の 4 つである。前 2 つは基本形、3 つ目は $u = 1+x^2$ で $x^3 = x^2 \cdot x$ と見て処理する。最後は $x = \tan t$ とおくと $\sin^2 t$ の積分になる。各項の定数を最後にまとめるとき、負の定数項が多いので符号を丁寧に確認する。

【解答】

与えられた定積分を I とおく。まず被積分関数を展開すると

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left\{ x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \right\} dx \end{aligned}$$

である。

各項を順に計算する。まず

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

である。また

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

である。

次に

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

を計算する。 $u = 1+x^2$ とおくと $du = 2x dx$ 、 $x^2 = u - 1$ なので

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{u-1}{u^{3/2}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(u^{-1/2} - u^{-3/2} \right) du \\ &= \left[\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_1^2 \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \end{aligned}$$

である。

最後に

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

を計算する。 $x = \tan t$ とおくと、 $x = 0$ で $t = 0$ 、 $x = 1$ で $t = \frac{\pi}{4}$ 、また $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$ である。したがって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \sin^2 t dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

以上を足し合わせて

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} + (\sqrt{2} - 1) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \right) + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{35}{12} \end{aligned}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

第 2 因子が $x - (1+x^2)^{-1/2}$ の導関数であることを利用して部分積分する。残る積分を基本形と $x = \tan t$ で処理する。

【解答】

$$F(x) = x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad G(x) = x - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

とおく。このとき

$$G'(x) = 1 + \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

だから、求める積分を I とすると部分積分により

$$I = [F(x)G(x)]_0^1 - \int_0^1 F'(x)G(x) dx.$$

ここで

$$[F(x)G(x)]_0^1 = \frac{1}{2}$$

であり、

$$F'(x)G(x) = 2x^2 - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

各項について

$$\int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 2(\sqrt{2} - 1),$$

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

また $x = \tan t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

したがって

$$I = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{2}{3} - 2(\sqrt{2} - 1) + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) \right\} \\ = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{35}{12}.$$

【総評】 難度 4、目安時間 12 分。東大理系第 1 問としては、複雑な見た目に引きずられず展開して 4 つの標準積分に分ける判断ができれば処理しやすい。 $x^3(1+x^2)^{-3/2}$ では $x^3 = x^2 \cdot x$ と見て $u = 1 + x^2$ に乗せること、 $x^2/(1+x^2)^2$ では $x = \tan t$ の範囲を 0 から $\pi/4$ と正しく変えることが採点点になる。最後は定数項 $\frac{1}{3} - 1 - 2 - \frac{1}{4}$ の整理でミスが出やすい。

【第 2 問】

一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。3 点 P, Q, R はそれぞれ辺 AB, AD, CD 上にあり、3 点 A, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。

$\frac{DR}{AQ}$ の最大値、最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

正方形を座標平面に置き、 $P = (p, 0)$ 、 $Q = (0, q)$ 、 $R = (r, 1)$ とする。 $\triangle APQ$ の面積条件から $pq = \frac{2}{3}$ を得て、 q を p で表す。次に $\triangle PQR$ の面積を行列式で表し、 $r = 2p - \frac{3}{2}p^2$ を導く。点が辺上にある条件から $\frac{2}{3} \leq p \leq 1$ を確定し、求める比 $DR/AQ = r/q$ を p の関数として最大最小を調べる。端点値は r ではなく r/q で比較する。

【解答】

$A = (0, 0)$ 、 $B = (1, 0)$ 、 $D = (0, 1)$ 、 $C = (1, 1)$ と座標を入れる。また $P = (p, 0)$ 、 $Q = (0, q)$ 、 $R = (r, 1)$ とおく。点は辺上にあるので $0 \leq p, q, r \leq 1$ である。 $\triangle APQ$ の面積が $\frac{1}{3}$ であるから $\frac{1}{2}pq = \frac{1}{3}$ であり、 $q = \frac{2}{3p}$ である。よって $p > 0$ である。

次に $\triangle PQR$ の面積を求める。 $\overrightarrow{PQ} = (-p, q)$ 、 $\overrightarrow{PR} = (r - p, 1)$ だから、面積の 2 倍は

$$\left| \begin{vmatrix} -p & q \\ r - p & 1 \end{vmatrix} \right| = |pq - p - qr|$$

である。ここでは面積条件と辺上の条件を満たす範囲で $|pq - p - qr| = p + qr - pq$ となるので $p + qr - pq = \frac{2}{3}$ である。 $pq = \frac{2}{3}$ を代入すると $p + qr - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ したがって $qr = \frac{4}{3} - p$ である。 $q = \frac{2}{3p}$ より $r = \frac{\frac{4}{3} - p}{\frac{2}{3p}} = 2p - \frac{3}{2}p^2$ を得る。 $q \leq 1$ より $p \geq \frac{2}{3}$ 、また $p \leq 1$ なので $\frac{2}{3} \leq p \leq 1$ である。この範囲では上で得た r も $0 \leq r \leq 1$ を満たす。

求める比は、 $DR = r$ 、 $AQ = q$ だから

$$\frac{DR}{AQ} = \frac{r}{q} = \left(2p - \frac{3}{2}p^2 \right) \frac{3p}{2} = 3p^2 - \frac{9}{4}p^3$$

である。そこで $f(p) = 3p^2 - \frac{9}{4}p^3$ とおくと $f'(p) = 6p - \frac{27}{4}p^2 = \frac{3p}{4}(8 - 9p)$ である。 $\frac{2}{3} \leq p \leq 1$ において、 f は $p = \frac{8}{9}$ までは増加し、その後減少する。

よって端点と停留点を比較すると

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad f\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{64}{81}, \quad f(1) = \frac{3}{4}$$

である。したがって、最大値は $\frac{64}{81}$ であり、最小値は $\frac{2}{3}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

$t = AP$ 、 $x = AQ$ 、 $y = DR$ と置き、正方形内の台形と三角形の面積を足して 3 変数の関係を作る。 $tx = 2/3$ で x を消去し、比 y/x を t の 3 次関数に直す。

【解答】

$t = AP$ 、 $x = AQ$ 、 $y = DR$ とおく。 $\triangle APQ$ の面積から

$$tx = \frac{2}{3}, \quad x = \frac{2}{3t}.$$

$x \leq 1$ と $t \leq 1$ より

$$\frac{2}{3} \leq t \leq 1.$$

正方形から 2 つの面積 $1/3$ の三角形を除くと、台形 $PBCR$ と三角形 QDR の面積の和は $1/3$ である。したがって

$$\frac{2-t-y}{2} + \frac{y(1-x)}{2} = \frac{1}{3}.$$

整理すると

$$t + xy = \frac{4}{3}.$$

ここへ $x = 2/(3t)$ を代入して

$$y = 2t - \frac{3}{2}t^2$$

を得る。よって

$$\frac{DR}{AQ} = \frac{y}{x} = \left(2t - \frac{3}{2}t^2\right) \frac{3t}{2} = 3t^2 - \frac{9}{4}t^3.$$

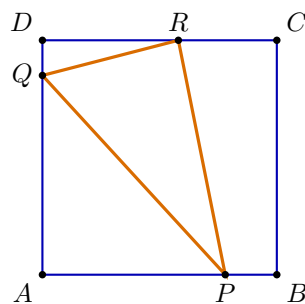
微分すると

$$\frac{d}{dt} \left(3t^2 - \frac{9}{4}t^3 \right) = \frac{3t}{4}(8 - 9t)$$

である。端点と停留点を比較すると

t	$2/3$	$8/9$	1
$\frac{DR}{AQ}$	$2/3$	$64/81$	$3/4$

となる。よって最大値は $64/81$ 、最小値は $2/3$ である。



【総評】 難度 4、目安時間 12 分。文系第 1 問と同型の座標・面積問題で、面積条件から q, r を p で表すところまでは標準的である。注意点は、最後に比較するのが r ではなく r/q であること。 $p = 1$ では $r = \frac{1}{2}$ だが $q = \frac{2}{3}$ なので比は $\frac{3}{4}$ になり、最小値ではない。端点 2 つと停留点 1 つを明示して比較すれば確実に得点できる。

【第 3 問】

座標空間内に 5 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(-2, 0, 0)$, $D(0, -2, 0)$, $E(0, 0, -2)$ を考える。線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り、直線 AE に平行な平面を α とする。さらに、 p は $2 < p < 4$ をみたす実数とし、点 $P(p, 0, 2)$ を考える。

- (1) 八面体 $PABCDE$ の平面 $y = 0$ による切り口および、平面 α の平面 $y = 0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。
- (2) 八面体 $PABCDE$ の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。
- (3) 実数 p が (2) で定まる範囲にあるとする。八面体 $PABCDE$ の平面 α による切り口のうち $y \geq 0$, $z \geq 0$ の部分を点 (x, y, z) が動くとき、座標平面上で点 (y, z) が動く範囲の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず M, N と AE の方向から平面 α の方程式を求める。 M, N を通るため y 方向を含み、 AE に平行であることから $x - z = 1$ となる。(2) は $\phi = x - z - 1$ の各頂点での符号を調べ、平面が八面体の辺を何本横切るかで八角形条件を判定する。(3) は $z \geq 0$ のため上側の角錐 $PABCD$ だけを扱う。高さ z の断面を $|x - \frac{p}{2}z| + |y| \leq 2 - z$ と表し、平面 $x = z + 1$ を代入して (y, z) 平面の領域に直す。絶対値の切り替わりと上端が 0 になる点で積分区間を分ける。

【解答】

(1) 線分 AB の中点、線分 AD の中点はそれぞれ $M = (1, 1, 0)$, $N = (1, -1, 0)$ である。また $\overrightarrow{AE} = (-2, 0, -2)$ である。平面 α は M, N を通るので y 方向を含み、さらに AE に平行である。したがって $x - z$ は平面上で一定であり、 M を代入して $\alpha: x - z = 1$ を得る。

平面 $y = 0$ で八面体を切ると、 xz 平面上で $C(-2, 0)$, $E(0, -2)$, $A(2, 0)$, $P(p, 2)$ を頂点とする四角形が得られる。また α と $y = 0$ の交線は $z = x - 1$ である。したがって、同じ xz 平面上にこの四角形と直線 $z = x - 1$ を描けばよい。

(2) α のどちら側に各頂点があるかを見るため $\phi = x - z - 1$ とおく。各頂点での値は

$$\phi(A) = 1, \quad \phi(B) = -1, \quad \phi(C) = -3, \quad \phi(D) = -1, \quad \phi(E) = 1, \quad \phi(P) = p - 3$$

である。 $p > 3$ のとき、正の側にある頂点は A, E, P 、負の側にある頂点は B, C, D である。八面体の辺のうち、両端が異なる側にあるものは $AB, AD, EB, EC, ED, PB, PC, PD$ の 8 本である。平面はこれら 8 本の辺と交わるので、切り口は八角形となる。 $p = 3$ のときは P が平面 α 上にあり、切り口の頂点数は八角形の形にならない。 $p < 3$ のときは正の側が A, E だけになり、平面と交わる辺は 6 本に減る。したがって、問題の条件 $2 < p < 4$ と合わせて、求める範囲は $3 < p < 4$ である。

(3) 以下 $3 < p < 4$ とする。 $z \geq 0$ の部分は上側の角錐 $PABCD$ に含まれる。高さ z で切ると、底面 $ABCD$ のひし形 $|x| + |y| \leq 2$ が、点 $P(p, 0, 2)$ に向かって相似に縮む。したがって断面は $|x - \frac{p}{2}z| + |y| \leq 2 - z$ ($0 \leq z \leq 2$) で表される。

平面 α 上では $x = z + 1$ である。さらに $y \geq 0$ を考えるので、上の不等式は $|1 - \frac{p-2}{2}z| + y \leq 2 - z$ となる。すなわち、 (y, z) 平面では $0 \leq y \leq 2 - z - \left|1 - \frac{p-2}{2}z\right|$ である。

絶対値の中身が 0 になるのは $z = \frac{2}{p-2}$ である。また上端が 0 になる右側の端は $3 - \frac{p}{2}z = 0$ より $z = \frac{6}{p}$ である。 $3 < p < 4$ では $0 < \frac{2}{p-2} < \frac{6}{p} < 2$ が成り立つ。

したがって領域は次の 2 つに分けられる。 $0 \leq z \leq \frac{2}{p-2}$, $0 \leq y \leq 1 - \frac{4-p}{2}z$ および $\frac{2}{p-2} \leq z \leq \frac{6}{p}$, $0 \leq y \leq 3 - \frac{p}{2}z$ である。

よって求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2}{p-2}} \left(1 - \frac{4-p}{2}z\right) dz + \int_{\frac{2}{p-2}}^{\frac{6}{p}} \left(3 - \frac{p}{2}z\right) dz \\ &= \left[z - \frac{4-p}{4}z^2\right]_0^{\frac{2}{p-2}} + \left[3z - \frac{p}{4}z^2\right]_{\frac{2}{p-2}}^{\frac{6}{p}} \\ &= \frac{7p-18}{p(p-2)} \end{aligned}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

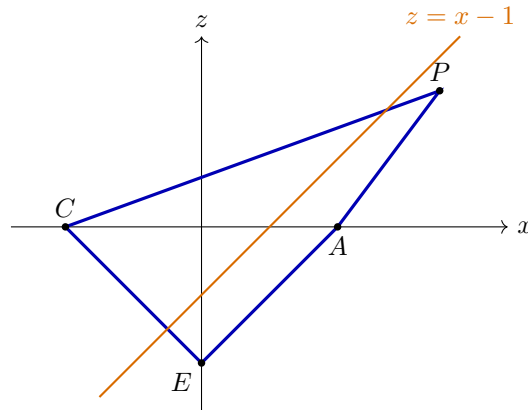
平面 α を $x - z = 1$ と求め、頂点での符号から切断辺を数える。最後は (y, z) 平面上の領域を四角形として捉え、積分を使わず対角線公式で面積を出す。

【解答】

(1) $M = (1, 1, 0)$ 、 $N = (1, -1, 0)$ であり、 AE の方向は $(-2, 0, -2)$ である。したがって

$$\alpha: x - z = 1.$$

平面 $y = 0$ 上では、八面体の切り口は四角形 $CEAP$ 、 α の切り口は直線 $z = x - 1$ となる。



(2) $\phi = x - z - 1$ とおくと

ϕ	A	B	C	D	E	P
	1	-1	-3	-1	1	$p-3$

である。 $p > 3$ のときだけ異符号の頂点を結ぶ辺が 8 本となるため、条件は

$$3 < p < 4.$$

(3) 高さ z における上側角錐の断面は

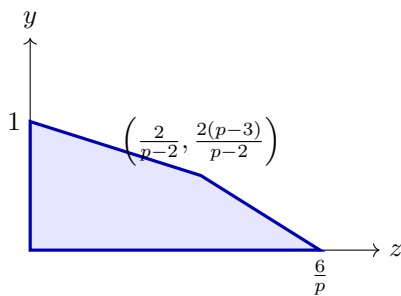
$$\left|x - \frac{p}{2}z\right| + |y| \leq 2 - z.$$

$x = z + 1$ 、 $y \geq 0$ を代入すると、 (z, y) 平面での領域は頂点

$$(0, 0), \quad (0, 1), \quad \left(\frac{2}{p-2}, \frac{2(p-3)}{p-2}\right), \quad \left(\frac{6}{p}, 0\right)$$

をもつ四角形になる。座標の面積公式から

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{p-2} + \frac{2(p-3)}{p-2} \cdot \frac{6}{p} \right\} \\ &= \frac{7p-18}{p(p-2)}. \end{aligned}$$



【総評】 難度 8、目安時間 35 分。平面の方程式、頂点の符号判定、断面の面積計算が連続する重い空間図形問題である。(2) では切り口の形を想像だけで決めず、 $\phi = x - z - 1$ の符号で交わる辺を数えると安定する。(3) は $z \geq 0$ だから上側角錐だけを扱えばよい、という切り分けが重要である。断面不等式 $|x - \frac{p}{2}z| + |y| \leq 2 - z$ を作れば、あとは絶対値の切り替わり $z = 2/(p-2)$ と領域の終端 $z = 6/p$ を丁寧に処理する積分問題になる。

【第 4 問】

n を 1 以上の整数とする。

- (1) $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ の最大公約数 d_n を求めよ。
- (2) $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

最大公約数は $5(n^2 + 1)$ と $5n^2 + 9$ の差を取ることで 4 の約数に限られる。あとは n の偶奇で $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ が奇数か、2 で割れて 4 では割れないかを判定する。(2) では、偶数の場合は 2 つの因子が互いに素なので、積が平方数なら各因子が平方数になることを使い、 $n^2 + 1$ が隣り合う平方数の間にあることに矛盾させる。奇数の場合は共通因子 2 を除いて互いに素な A, B に分け、 $B \equiv 3 \pmod{4}$ が平方数でないことを用いる。

【解答】

(1) d_n は $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ の最大公約数である。したがって d_n はそれらの整数係数の差も割るので $(5n^2 + 9) - 5(n^2 + 1) = 4$ より、 d_n は 4 の正の約数である。 n が偶数のとき、 n^2 は偶数であり、 $n^2 + 1$ は奇数である。よって共通約数は偶数ではあり得ない。 d_n は 4 の約数だから $d_n = 1$ である。 n が奇数のとき、 $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$ であるから $n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ 、 $5n^2 + 9 \equiv 5 + 9 \equiv 2 \pmod{4}$ である。両方とも 2 で割れるが 4 では割れない。 d_n は 4 の約数なので、この場合は $d_n = 2$ である。

したがって

$$d_n = \begin{cases} 1 & (2 \mid n), \\ 2 & (2 \nmid n) \end{cases}$$

である。

(2) まず n が偶数の場合を考える。(1) より $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ は互いに素である。互いに素な 2 つの整数の積が平方数なら、それぞれの整数が平方数でなければならない。もし $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ が平方数なら、特に $n^2 + 1$ は平方数である。しかし $n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2$ であり、 $n^2 + 1$ は連続する平方数 n^2 、 $(n+1)^2$ の間にある。これは平方数であり得ない。

次に n が奇数の場合を考える。 $A = \frac{n^2 + 1}{2}$ 、 $B = \frac{5n^2 + 9}{2}$ とおく。(1) で最大公約数が 2 であることから、 A と B は互いに素である。

もし $(n^2 + 1)(5n^2 + 9) = 4AB$ が平方数なら、4 は平方数なので AB も平方数である。さらに A, B は互いに素だから、 A と B はそれぞれ平方数でなければならない。

ところが、 n が奇数なら $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ である。よって $B = \frac{5n^2 + 9}{2} \equiv \frac{5 + 9}{2} \equiv 7 \equiv 3 \pmod{4}$ である。平方数は 4 で割ると 0 または 1 にしかならないので、 B は平方数ではない。これは矛盾である。

以上より、すべての正の整数 n について $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は整数の 2 乗にならない。

▶ 解法 2

【方針】

最大公約数はユークリッドの互除法で 4 の約数に絞る。(2) は偶数 n では互いに素な因子、奇数 n では積そのものの 16 を法とする剰余を使う。

【解答】

(1)

$$d_n = \gcd(n^2 + 1, 5n^2 + 9) = \gcd(n^2 + 1, 4).$$

n が偶数なら $n^2 + 1$ は奇数なので $d_n = 1$ 。 n が奇数なら $n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ なので $d_n = 2$ 。したがって

$$d_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数}), \\ 2 & (n \text{ が奇数}). \end{cases}$$

(2) n が偶数なら 2 因子は互いに素である。積が平方数なら各因子が平方数になるが、

$$n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2$$

だから矛盾する。

n が奇数なら $n^2 \equiv 1$ または $9 \pmod{16}$ である。どちらの場合も

$$(n^2 + 1)(5n^2 + 9) \equiv 12 \pmod{16}.$$

実際、 $n^2 \equiv 1$ なら $2 \cdot 14 \equiv 12$ 、 $n^2 \equiv 9$ なら $10 \cdot 6 \equiv 12 \pmod{16}$ である。一方、平方数の 16 を法とする剰余は 0, 1, 4, 9 のいずれかなので、これも矛盾する。

よって、すべての正の整数 n について与えられた積は平方数にならない。

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。最大公約数を 4 の約数に押さえる発想が出れば、(1) は偶奇だけで終わる。(2) は「互いに素な積が平方数なら各因子が平方数」という基本事実を、偶数の場合と奇数の場合で使い分ける問題である。奇数の場合は共通因子 2 を除いた後に互いに素であることを明示し、最後に $B \equiv 3 \pmod{4}$ で平方数でないと結論する。合同式の割り算を雑に書かず、 $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ から B の 4 での余りを出すと安全である。

【第 5 問】

以下の問いに答えよ。

(1) n を 1 以上の整数とする。 x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は、ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1) で定まる a_n に対し、 $\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

(3) (1) で定まる数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ に対し、

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n, \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず方程式の実数解が存在し得る範囲を絞る。 $|x| > 1$ や $x < 0$ では左辺と右辺の大きさ・符号が合わないの、解は $0 < x < 1$ に限られる。この区間で $x^{2n-1} - \cos x$ が連続かつ単調増加であることから一意性を示す。(2) は $0 < a_n < 1$ と $\cos x$ の単調性で終わる。(3) は方程式を $a_n^{2n-1} = \cos a_n$ と見て、まず $a_n \rightarrow 1$ をはさみうちで示す。さらに両辺に a_n を掛けて $a_n^n = \sqrt{a_n \cos a_n}$ と表せば、 b と最後の差商は 1 変数関数 $g(x) = \sqrt{x \cos x}$ の値と微分係数に帰着する。

【解答】

(1) 方程式 $x^{2n-1} = \cos x$ を考える。

まず解の範囲を絞る。 $x > 1$ なら左辺は 1 より大きく、右辺は 1 以下なので解はない。 $x < -1$ なら左辺は -1 より小さく、右辺は -1 以上なので解はない。また $-1 \leq x < 0$ では、左辺は負である一方、 $\cos x \geq \cos 1 > 0$ なので解はない。 $x = 0$ でも左辺は 0、右辺は 1 であり解ではない。

したがって解は $0 < x \leq 1$ の範囲で考えればよい。関数 $f(x) = x^{2n-1} - \cos x$ を $0 \leq x \leq 1$ で考えると、 f は連続で $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$ である。よって中間値の定理により少なくとも 1 つ解をもつ。

さらに $f'(x) = (2n-1)x^{2n-2} + \sin x$ であり、 $0 < x \leq 1$ では $f'(x) > 0$ である。したがって f は $0 < x \leq 1$ で狭義単調増加であり、解は高々 1 つである。

以上より、方程式はただ一つの実数解 a_n をもつ。

(2) (1) の議論から $0 < a_n < 1$ である。 $\cos x$ は $0 \leq x \leq 1$ で単調減少するので $\cos a_n > \cos 1$ である。

(3) 定義より $a_n^{2n-1} = \cos a_n$ である。(2) から $\cos a_n > \cos 1$ なので $a_n^{2n-1} > \cos 1$ である。 $0 < a_n < 1$ と合わせると $(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$ である。 $n \rightarrow \infty$ とすると左端は 1 に近づくから、はさみうちにより $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ である。

次に、方程式の両辺に a_n を掛けると $a_n^{2n} = a_n \cos a_n$ である。 $a_n > 0$ なので $a_n^n = \sqrt{a_n \cos a_n}$ と書ける。よって $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = \sqrt{\cos 1}$ である。

最後に $g(x) = \sqrt{x \cos x}$ とおく。上で示したように $a_n^n = g(a_n)$ 、 $b = g(1)$ 、 $a = 1$ であるから $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(a_n) - g(1)}{a_n - 1}$ である。 $a_n \rightarrow 1$ かつ $a_n \neq 1$ なので、この極限は $g'(1)$ に等しい。

微分すると $g'(x) = \frac{\cos x - x \sin x}{2\sqrt{x \cos x}}$ である。したがって $c = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

存在・一意性は x^{2n-1} の増加と $\cos x$ の減少を比較する。最後の極限は平方差で分子を有理化し、余弦の差商へ直接帰着する。

【解答】

(1) 解は符号と大きさから $0 < x < 1$ に限られる。この区間で x^{2n-1} は狭義増加し、 $\cos x$ は狭義減少する。また

$$0^{2n-1} < \cos 0, \quad 1^{2n-1} > \cos 1.$$

連続性より交点は存在し、単調性よりただ 1 つである。これを a_n とする。

(2) $0 < a_n < 1$ と $\cos x$ の単調減少性から

$$\cos a_n > \cos 1.$$

(3) 方程式と (2) より

$$(\cos 1)^{1/(2n-1)} < a_n < 1.$$

したがって $a_n \rightarrow 1$ 、すなわち $a = 1$ である。また

$$a_n^{2n} = a_n \cos a_n$$

だから

$$a_n^n = \sqrt{a_n \cos a_n} \rightarrow \sqrt{\cos 1}.$$

よって $b = \sqrt{\cos 1}$ である。

最後に平方差を使うと

$$\begin{aligned} \frac{a_n^n - b}{a_n - 1} &= \frac{a_n^{2n} - b^2}{(a_n - 1)(a_n^n + b)} \\ &= \frac{a_n \cos a_n - \cos 1}{(a_n - 1)(a_n^n + b)} \\ &= \frac{\cos a_n + a_n \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1}}{a_n^n + b}. \end{aligned}$$

ここで余弦の差商は $-\sin 1$ に収束するので

$$c = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}.$$

【総評】 難度 7、目安時間 25 分。一意性は単調性で自然に示せるが、先に解の範囲を $0 < x < 1$ に絞る必要がある。(3) は $a_n \rightarrow 1$ を示すだけならはさみうちでよいが、 a_n^n の極限には $a_n^{2n} = a_n \cos a_n$ と変形する観察が必要である。最後の c は数列の細かい近似を直接出そうとせず、 $a_n^n = g(a_n)$ と見て差商を微分係数に帰着するのが最短である。大学範囲の展開を使わずに処理できる。

【第 6 問】

複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ および実数 a, b が、次の 3 条件をみたしながら動く。

条件 1: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は相異なる。

条件 2: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は 4 次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である。

条件 3: 複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は 0 であり、虚部は 0 でない。

(1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のうち、ちょうど 2 つが実数であり、残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ。

(2) b を a で表せ。

(3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

係数が実数であることから、非実数解は共役な組で現れる。条件 3 では $\alpha\beta + \gamma\delta$ が純虚数で 0 でないため、4 根がすべて実数の場合も、非実数根が 2 組だけの場合も除外される。そこで実根を x, y 、非実根を $u \pm vi$ と置く。条件 3 が成り立つには実根と非実根が組になっていなければならないので、実部・虚部を比較して $u(x+y) = 0, x \neq y$ を得る。あとは解と係数の関係を $u = 0$ と $x+y = 0$ の 2 場合に分けて使い、どちらも $b = -a^2$ に帰着させる。最後は $\alpha + \beta$ が「実根 1 つ + 非実根 1 つ」であることを用いて、双曲線 $(X-1)^2 - Y^2 = 1$ を導く。

【解答】

(1) 方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の係数はすべて実数である。したがって、実数でない解があれば、その共役複素数も解である。

4 つの解がすべて実数であるとする、 $\alpha\beta + \gamma\delta$ は実数になり、条件 3 の「虚部は 0 でない」に反する。

次に、4 つの解がすべて実数でないとする。このとき解は 2 組の共役複素数 $u + vi, u - vi, s + ti, s - ti$ の形である。共役な 2 つを同じ組にすれば積は実数であり、交差して組にしても、例えば $(u + vi)(s + ti) + (u - vi)(s - ti) = 2(us - vt)$ のように和は実数になる。したがって、どのように 2 つずつ組にしても $\alpha\beta + \gamma\delta$ は実数となり、条件 3 に反する。

よって 4 つの解のうち、ちょうど 2 つが実数であり、残りの 2 つは互いに共役な複素数である。

(2) 実数解を x, y 、実数でない解を $u + vi, u - vi$ とおく。ただし $v \neq 0$ である。

条件 3 より、 $\alpha\beta$ と $\gamma\delta$ はそれぞれ実根と非実根の積でなければならない。もし実根どうし、非実根どうしを掛ける組があれば、和は実数になってしまうからである。したがって、必要なら文字を入れ替えて $\alpha = x, \beta = u + vi, \gamma = y, \delta = u - vi$ としてよい。このとき $\alpha\beta + \gamma\delta = x(u + vi) + y(u - vi) = u(x + y) + v(x - y)i$ である。条件 3 から実部は 0、虚部は 0 でないので $u(x + y) = 0, x \neq y$ を得る。

解と係数の関係より $x + y + 2u = 2$ であり、2 つずつの積の和は 0 だから $xy + 2u(x + y) + u^2 + v^2 = 0$ である。また 3 つずつの積の和は $2a$ であり、4 つの積は b である。

まず $u = 0$ の場合を考える。このとき $x + y = 2$ であり、2 つずつの積の関係から $xy + v^2 = 0$ である。3 つずつの積の和は $xy(u + vi) + xy(u - vi) + x(u^2 + v^2) + y(u^2 + v^2)$ であり、 $u = 0, x + y = 2$ を代入すると $2a = 2v^2$ となる。したがって $a = v^2$ である。また $b = xy(u^2 + v^2) = xyv^2 = -v^4$ なので $b = -a^2$ である。

次に $x + y = 0$ の場合を考える。 $x + y + 2u = 2$ より $u = 1$ である。2 つずつの積の関係から $xy + 1 + v^2 = 0$ すなわち $xy = -(1 + v^2)$ である。3 つずつの積の和は、 $x + y = 0, u = 1$ を用いると $2a = 2xy$ となるので $a = xy = -(1 + v^2)$ である。また $b = xy(u^2 + v^2) = xy(1 + v^2) = -(1 + v^2)^2$ だから、この場合も $b = -a^2$ である。

以上より $b = -a^2$ である。

(3) 条件 3 のもとで、 α と β は実根 1 つと非実根 1 つの組である。そこで $w = \alpha + \beta = X + Yi$ とおく。上の記号では、

$w = x + u + vi$ と書ける。ここで $v \neq 0$ だから $Y \neq 0$ である。 $u = 0$ の場合、 $x + y = 2$ 、 $xy = -v^2$ である。したがって x, y は $T^2 - 2T - v^2 = 0$ の 2 解であり $x = 1 \pm \sqrt{1 + v^2}$ である。このとき $w = 1 \pm \sqrt{1 + v^2} + vi$ となる。 $x + y = 0$ の場合は $u = 1$ 、 $xy = -(1 + v^2)$ である。したがって $x = \pm \sqrt{1 + v^2}$ であり、このときも $w = 1 \pm \sqrt{1 + v^2} + vi$ と書ける。

よって、 $w = X + Yi$ の満たす条件は $X = 1 \pm \sqrt{1 + Y^2}$ 、 $Y \neq 0$ である。これは $(X - 1)^2 - Y^2 = 1$ 、 $Y \neq 0$ を満たす点全体である。

したがって、複素数平面上では中心を 1 だけ右へ移した双曲線 $(X - 1)^2 - Y^2 = 1$ の 2 つの枝から、実軸上の 2 点 0、2 を除いた部分が求める範囲である。

▶ 解法 2

【方針】

実根 2 個と共役な非実根 2 個に分類し、解と係数の関係から $b = -a^2$ を得る。その後 4 次式を 2 つの 2 次式に因数分解し、根を明示して $\alpha + \beta$ の軌跡を読む。

【解答】

(1) 係数が実数なので非実根は共役な組で現れる。4 根がすべて実数なら $\alpha\beta + \gamma\delta$ は実数である。2 組の共役な非実根だけからなる場合も、どの組分けでも 2 つの積の和は実数になる。条件 3 に反するから、実根が 2 個、共役な非実根が 2 個である。

(2) 実根を x, y 、非実根を $u \pm vi$ とする。条件 3 を満たす組分けでは

$$\alpha\beta + \gamma\delta = u(x + y) + v(x - y)i.$$

したがって $u(x + y) = 0$ かつ $x \neq y$ である。解と係数の関係

$$x + y + 2u = 2, \quad xy + 2u(x + y) + u^2 + v^2 = 0$$

を用いる。 $u = 0$ のときは $x + y = 2$ 、 $xy = -v^2$ 、 $a = v^2$ となり $b = xyv^2 = -a^2$ である。 $x + y = 0$ のときは $u = 1$ 、 $xy = -(1 + v^2) = a$ となり、やはり $b = xy(1 + v^2) = -a^2$ である。

(3) (2) から 4 次式は

$$z^4 - 2z^3 - 2az - a^2 = (z^2 + a)(z^2 - 2z - a)$$

と因数分解できる。 $a > 0$ では根は

$$\pm i\sqrt{a}, \quad 1 \pm \sqrt{1 + a},$$

$a < -1$ では根は

$$\pm\sqrt{-a}, \quad 1 \pm i\sqrt{-1 - a}.$$

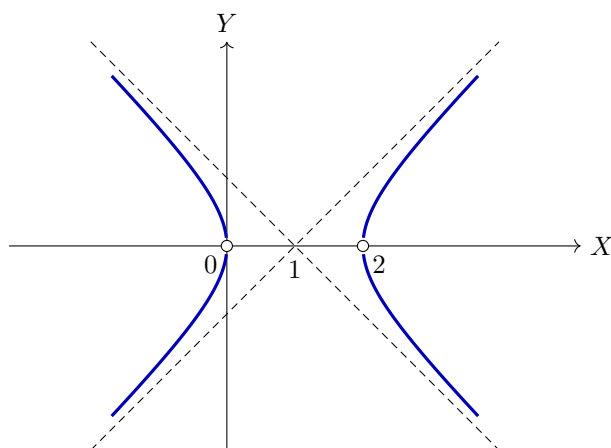
$a = 0, -1$ は相異なる 4 根という条件を満たさない。条件 3 の組では実根 1 個と非実根 1 個を足すので、 $w = \alpha + \beta = X + Yi$ はいずれの場合も

$$X = 1 \pm \sqrt{1 + Y^2}, \quad Y \neq 0.$$

したがって軌跡は

$$(X - 1)^2 - Y^2 = 1, \quad Y \neq 0$$

であり、双曲線から実軸上の 2 点 0、2 を除いた部分である。



【総評】 難度 8、目安時間 35 分。条件 3 が根の並べ方に関わるため、ただ Vieta を並べるだけでは整理しにくい。最初に「非実根は共役」「条件 3 の和が非実数なので、実根と非実根を掛ける組しかない」と見抜くことが核心である。(2) では $u(x+y)=0$ から 2 場合に分かれるが、どちらも解と係数の関係を丁寧に代入すれば $b=-a^2$ にそろう。(3) はラベルに惑わされず、 $\alpha+\beta$ が実根 1 つと非実根 1 つの和になることを使えば、範囲は双曲線としてきれいに表せる。実軸上の 2 点を除く条件 $Y \neq 0$ を忘れないこと。