

東京大学 2020 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

 a, b, c, p を実数とする。不等式

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$bx^2 + cx + a > 0$$

$$cx^2 + ax + b > 0$$

をすべて満たす実数 x の集合と、 $x > p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

- (1) a, b, c はすべて 0 以上であることを示せ。
- (2) a, b, c のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。
- (3) $p = 0$ であることを示せ。

▶ 解法 1 (大きな正負の値と零係数を使う方法)

【方針】

共通解集合を S とする。(1) は十分大きい正の x を代入し、3 つの最高次係数の符号を決める。(2) は全係数が正なら $x = 0$ と十分大きい負の x がともに S に入り半直線と矛盾する。(3) は $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ に分け、零係数から負の x を排除する。

【解答】

3 つの不等式をすべて満たす集合を S とする。仮定より

$$S = \{x \mid x > p\}.$$

(1)

十分大きい正の x は S に属する。もし $a < 0$ なら

$$ax^2 + bx + c \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

となって矛盾する。よって $a \geq 0$ である。同様に第 2 式、第 3 式の最高次係数から

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0$$

を得る。

(2)

a, b, c がすべて正だと仮定する。 $x = 0$ では 3 式の値がそれぞれ c, a, b だから $0 \in S$ 、したがって $p < 0$ である。

一方、 $x \rightarrow -\infty$ では 3 つの二次式はいずれも正の二次項に支配されて正になる。十分小さい $x \leq p$ も S に入ることであり、 $S = (p, \infty)$ に反する。ゆえに a, b, c の少なくとも 1 個は 0 である。

(3)

$a = b = c = 0$ なら S は空集合になるが、 (p, ∞) は空でない。したがって少なくとも 1 個の係数は正である。

$x > 0$ なら、各式は非負の係数 a, b, c に正数 $x^2, x, 1$ を掛けた和であり、少なくとも 1 項は正である。よって

$$x > 0 \implies x \in S.$$

$x = 0$ では 3 式の値は c, a, b であり、少なくとも 1 個が 0 だから $0 \notin S$ である。

最後に $x < 0$ とし、 $t = -x > 0$ とおく。たとえば $c = 0$ なら、第 1 式と第 3 式から

$$at^2 - bt > 0, \quad -at + b > 0$$

が必要である。前者は $at > b$ 、後者は $b > at$ を意味し、矛盾する。 $a = 0, b = 0$ の場合も添字を巡回させれば同じ矛盾が生じる。したがって負の x は S に属さない。

以上より

$$S = (0, \infty).$$

これが (p, ∞) と一致するので

$$p = 0.$$

▶ 解法 2 (零係数を巡回置換して 2 式をまとめる方法)

【方針】

(1)(2) で非負かつ零係数を含むことを示した後、式の巡回対称性により $a = 0$ としてよい。第 1 式を $L(x) > 0$ 、第 2 式を $xL(x) > 0$ と見ると、共通解には $x > 0$ が必要であり、逆も直ちに確認できる。

【解答】

(1)

すべての十分大きい正の x が 3 不等式を満たすため、それぞれの二次式の最高次係数は負になれない。よって

$$a, b, c \geq 0.$$

(2)

もし $a, b, c > 0$ なら $x = 0$ は共通解である。また絶対値の十分大きい負の x も、正の二次項が支配的になるため共通解である。この共通解集合は右向き半直線にならない。したがって少なくとも 1 個は 0 である。

(3)

3 式と係数 a, b, c は巡回対称だから、零係数を $a = 0$ としてよい。また 3 係数がすべて 0 ではないので、 b, c の少なくとも一方は正である。

このとき最初の 2 不等式は

$$bx + c > 0, \quad bx^2 + cx = x(bx + c) > 0.$$

両方が成り立つなら、第 1 式の因子 $bx + c$ は正だから、必ず $x > 0$ である。

逆に $x > 0$ なら

$$bx + c > 0, \quad x(bx + c) > 0, \quad cx^2 + b > 0.$$

ここで最後の式も、 b, c の少なくとも一方が正なので厳密に正である。したがって共通解集合はちょうど

$$(0, \infty)$$

であり、 $p = 0$ となる。

【総評】 難度 6、計算量 4。想定時間は 22 分程度。解集合が右向き半直線であることを、十分大きい正の x 、 $x = 0$ 、十分大きい負の x に順に使う論証問題である。(3) は零係数を 1 つ固定すると、2 つの不等式が $L(x) > 0$ と $xL(x) > 0$ の形になり、負の x を一度に排除できる。

【第 2 問】

平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき、それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle PQR$ で表す。また、 P, Q, R が同一直線上にあるときは、 $\triangle PQR = 0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし、 $\triangle ABC = 1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leq 3$$

を満たしながら動くとき、 X の動きうる範囲の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (座標を置いて六角形の差を求める方法)

【方針】

面積を 1 に保つ座標配置 $A = (0, 0), B = (2, 0), C = (0, 1)$ を採用する。 $u = x/2, v = y$ とおくと 3 面積の和は $|u| + |v| + |1 - u - v|$ になる。この値が s 以下の六角形の面積を求め、 $s = 3$ と $s = 2$ の差を取る。

【解答】

面積比を保つ座標変換により

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (0, 1)$$

としてよい。 $X = (x, y)$ に対し

$$u = \frac{x}{2}, \quad v = y$$

とおく。行列式で各面積を求めると

$$\triangle ABX = |v|, \quad \triangle BCX = |1 - u - v|, \quad \triangle CAX = |u|.$$

よって条件は

$$2 \leq |u| + |v| + |1 - u - v| \leq 3.$$

$s \geq 1$ とし、

$$|u| + |v| + |1 - u - v| \leq s$$

の表す領域を K_s とする。符号が変わる 3 直線

$$u = 0, \quad v = 0, \quad u + v = 1$$

で分けて調べると、 K_s は頂点

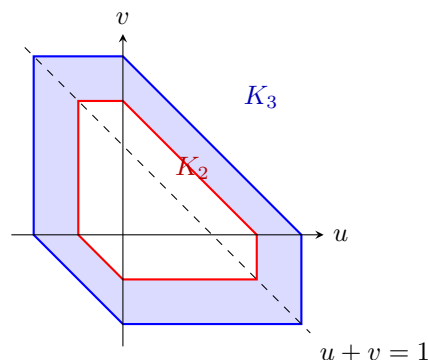
$$\left(-\frac{s-1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{s-1}{2}\right), \left(\frac{s+1}{2}, -\frac{s-1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{s+1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{s+1}{2}\right), \left(-\frac{s-1}{2}, \frac{s+1}{2}\right)$$

をもつ六角形である。

$h = (s-1)/2$, $H = (s+1)/2$ とおく。この六角形は一辺 s の正方形から、脚の長さが H と h の直角二等辺三角形を 1 個ずつ除いた形なので、 (u, v) 平面での面積は

$$s^2 - \frac{H^2 + h^2}{2} = \frac{3s^2 - 1}{4}.$$



$x = 2u, y = v$ だから、もとの平面の面積は 2 倍になる。したがって求める面積は

$$2 \left\{ \frac{3 \cdot 3^2 - 1}{4} - \frac{3 \cdot 2^2 - 1}{4} \right\} = \frac{15}{2}.$$

▶ 解法 2 (面積座標の負の部分数を数える方法)

【方針】

点 X の符号付き面積座標を α, β, γ とする。和が 1 で、問題の 3 面積は絶対値 $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$ になる。負の座標の絶対値の総和を $q = (s - 1)/2$ 以下にする領域を、負の座標が 0 個・1 個・2 個の場合に分けて面積計算する。

【解答】

三角形 ABC に関する X の符号付き面積座標を

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

とする。向きをそろえて定義すれば

$$\alpha + \beta + \gamma = 1,$$

また $\triangle ABC = 1$ だから

$$\triangle BCX = |\alpha|, \quad \triangle CAX = |\beta|, \quad \triangle ABX = |\gamma|.$$

$\gamma = 1 - \alpha - \beta$ として (α, β) 平面で考える。

$s \geq 1$ に対して

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \leq s$$

とする。負の座標の絶対値の総和を N とすると、3 座標の和が 1 なので

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 1 + 2N.$$

したがって

$$N \leq q, \quad q = \frac{s-1}{2}.$$

負の座標がない部分は、 $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ の三角形で、 (α, β) 平面での面積は $1/2$ である。

$\alpha < 0$ だけが負の場合、 $\alpha = -u$ とおけば

$$0 \leq u \leq q, \quad 0 \leq \beta \leq 1 + u.$$

この部分の面積は

$$\int_0^q (1+u) du = q + \frac{q^2}{2}.$$

負になる座標の選び方が 3 通りある。

2 座標が負の場合、たとえば $\alpha = -u, \beta = -v$ とすると

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad u + v \leq q.$$

面積は $q^2/2$ で、負になる 2 座標の選び方が 3 通りある。

よって (α, β) 平面での全体の面積は

$$\frac{1}{2} + 3 \left(q + \frac{q^2}{2} \right) + 3 \frac{q^2}{2} = \frac{3s^2 - 1}{4}.$$

面積座標の基準三角形は (α, β) 平面で面積 $1/2$ 、もとの平面で面積 1 だから、面積倍率は 2 である。したがって

$$2 \left(\frac{3 \cdot 3^2 - 1}{4} - \frac{3 \cdot 2^2 - 1}{4} \right) = \frac{15}{2}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 24 分程度。3 つの面積を絶対値つき一次式へ直せるかが核心である。六角形の頂点を暗記せず、 $u = 0, v = 0, u + v = 1$ で符号が変わることから復元する。最後に $x = 2u$ の面積倍率 2 を掛け忘れない。境界を含むかどうかは面積値には影響しない。

【第 3 問】

$-1 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して、

$$x(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$$

$$y(t) = 3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点 $P(x(t), y(t))$ を考える。

- (1) $-1 < t \leq 1$ における t の関数 $\frac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ。
- (2) 原点と P の距離を $f(t)$ とする。 $-1 \leq t \leq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ、最大値を求めよ。
- (3) t が $-1 \leq t \leq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし、 C と x 軸で囲まれた領域を D とする。原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき、 D が通過する領域の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (偏角と最大半径で回転領域を分ける方法)

【方針】

(1) は y/x を直接整理し、偏角が単調に減少することを得る。(2) は距離の二乗を微分する。(3) はまず表示積分で D の面積を求め、偏角 $\pi/3$ で最大半径をとることから、回転通過領域を D に最大半径の 90° 扇形を加えたものとして数える。

【解答】

(1)

$-1 < t \leq 1$ では $x(t) > 0$ であり、

$$\frac{y(t)}{x(t)} = 3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

$(1-t)/(1+t)$ はこの区間で単調に減少し、平方根も単調性を保つ。したがって $y(t)/x(t)$ は単調に減少する。

(2)

距離の二乗を $F(t) = f(t)^2$ とすると

$$\begin{aligned} F(t) &= (1+t)^3 + 9(1+t)^2(1-t) \\ &= 2(1+t)^2(5-4t). \end{aligned}$$

よって

$$F'(t) = 12(1+t)(1-2t).$$

したがって $f(t)$ は

$$-1 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

で増加し、

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

で減少する。最大値は $t = 1/2$ で

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

(3)

(1) より、 P の偏角は $\pi/2$ から 0 まで単調に減少する。したがって D は、各方向について原点から C までの線分を集めた星形領域である。

まず D の面積を求める。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}\sqrt{1+t}$$

だから

$$\begin{aligned} S_D &= \int_{-1}^1 y(t) \frac{dx}{dt} dt \\ &= \frac{9}{2} \int_{-1}^1 (1+t)^{3/2} (1-t)^{1/2} dt. \end{aligned}$$

$t = 2u - 1$ 、さらに $u = \sin^2 \phi$ とおくと

$$\int_{-1}^1 (1+t)^{3/2}(1-t)^{1/2} dt = 16 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \phi \cos^2 \phi d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

よって

$$S_D = \frac{9\pi}{4}.$$

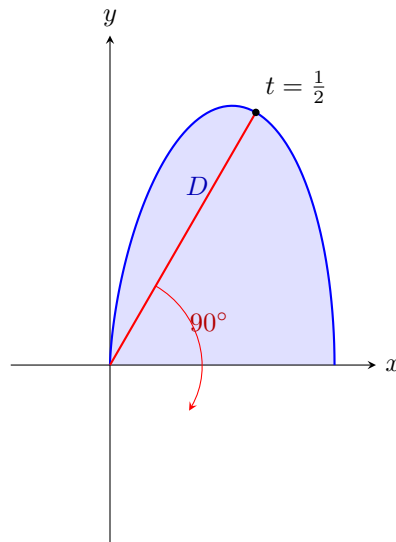
最大半径は

$$R = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

$t = 1/2$ のとき

$$\frac{y}{x} = \sqrt{3}$$

だから、その偏角は $\pi/3$ である。



原点から見た方向を φ とする。時計回りに $\pi/2$ 回す間に、 $-\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3$ では最大半径 R の点はその方向まで到達する。両側の方向では、もとの D の半径分布が重複なく移る。したがって通過領域の面積は、 D の面積に半径 R 、中心角 $\pi/2$ の扇形を加えたものになる。

$$\begin{aligned} S &= S_D + \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{9\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{27}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{45\pi}{8}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (三角置換で軌跡を表示する方法)

【方針】

$t = \cos 2\phi$ とおき、軌跡を $x = 2\sqrt{2}\cos^3 \phi$, $y = 6\sqrt{2}\sin \phi \cos^2 \phi$ と表示する。面積は三角関数の定積分で計算し、半径の増減と偏角の単調性から回転後の半径包絡を 3 つの角度区間に分ける。

【解答】

(1)

比の二乗をとると

$$\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2 = 9\frac{1-t}{1+t}.$$

右辺の導関数は

$$-\frac{18}{(1+t)^2} < 0$$

であり、 $y/x \geq 0$ だから y/x 自身も単調に減少する。

(2)

$$f(t)^2 = 2(1+t)^2(5-4t)$$

を微分すれば

$$\frac{d}{dt}f(t)^2 = 12(1+t)(1-2t).$$

よって $t = 1/2$ までは増加、その後は減少し、

$$\max f(t) = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

(3)

$t = \cos 2\phi$ とおくと $0 \leq \phi \leq \pi/2$ で

$$x = 2\sqrt{2}\cos^3 \phi, \quad y = 6\sqrt{2}\sin \phi \cos^2 \phi.$$

したがって

$$\begin{aligned} S_D &= \int_0^{\pi/2} 6\sqrt{2}\sin \phi \cos^2 \phi \cdot 6\sqrt{2}\sin \phi \cos^2 \phi d\phi \\ &= 72 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \cos^4 \phi d\phi. \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \cos^4 \phi d\phi = \int_0^{\pi/2} (\cos^4 \phi - \cos^6 \phi) d\phi = \frac{3\pi}{16} - \frac{5\pi}{32} = \frac{\pi}{32}.$$

よって $S_D = 9\pi/4$ である。

もとの偏角を θ とすると $0 \leq \theta \leq \pi/2$ で、半径は $\theta = \pi/3$ まで増加し、その後減少する。回転後の方向 φ ごとの最大半径は、

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}$$

では D の $0 \leq \theta \leq \pi/3$ の部分を $-\pi/2$ 回したものの、

$$-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$$

では一定値 $R = 3\sqrt{6}/2$ 、

$$\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

では D の $\pi/3 \leq \theta \leq \pi/2$ の部分である。両端の 2 部分の面積を合わせるとちょうど S_D になる。ゆえに

$$S = S_D + \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{9\pi}{4} + \frac{27\pi}{8} = \frac{45\pi}{8}.$$

【総評】 難度 8、計算量 8。想定時間は 35 分程度。(1) の偏角の単調性と、(2) の半径の単峰性を (3) で同時に使う。通過領域を回転前の領域のコピー 4 枚として足すと重複するため、方向ごとの最大半径を見る必要がある。最大半径の方向が $\pi/3$ で、そこから時計回りの $\pi/2$ 区間に扇形が生じる。

【第 4 問】

n, k を、 $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。 n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。 k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_nC_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば、

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

- (1) 2 以上の整数 n に対し、 $a_{n,2}$ を求めよ。
 (2) 1 以上の整数 n に対し、 x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \dots + a_{n,n}x^n$$

を考える。 $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

- (3) $\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。

▶ 解法 1 (母関数を 2 通りに比較する方法)

【方針】

$a_{n,k}$ を整式 $f_n(x)$ の係数として捉える。(1) は平方和を引いて求め、(2) は f_n を積に分解する。(3) は $f_{n+1}(x)$ を $(1+2^n x)f_n(x)$ と $(1+x)f_n(2x)$ の 2 通りに表し、係数比較で不要な比を消去する。

【解答】

(1)

$$a_{n,2} = \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} 2^{i+j}.$$

全体の和の平方から同じ項どうしの積を除くと

$$a_{n,2} = \frac{1}{2} \{ (1 + 2 + \dots + 2^{n-1})^2 - (1 + 2^2 + \dots + 2^{2n-2}) \}.$$

等比数列の和を代入して

$$\begin{aligned} a_{n,2} &= \frac{1}{2} \left\{ (2^n - 1)^2 - \frac{4^n - 1}{3} \right\} \\ &= \frac{4^n - 3 \cdot 2^n + 2}{3}. \end{aligned}$$

(2)

各因子から定数項または $2^m x$ を選んで展開すると、 x^k の係数がちょうど $a_{n,k}$ になる。よって

$$f_n(x) = (1+x)(1+2x) \cdots (1+2^{n-1}x).$$

したがって

$$f_{n+1}(x) = (1+2^n x)f_n(x)$$

および

$$f_{n+1}(x) = (1+x)f_n(2x)$$

であるから、

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1 + 2^n x, \quad \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = 1 + x.$$

(3)

第 1 の恒等式で x^{k+1} の係数を比較すると

$$a_{n+1,k+1} = a_{n,k+1} + 2^n a_{n,k}.$$

第 2 の恒等式からは

$$a_{n+1,k+1} = 2^{k+1} a_{n,k+1} + 2^k a_{n,k}.$$

両式を引いて

$$(2^n - 2^k) a_{n,k} = (2^{k+1} - 1) a_{n,k+1},$$

したがって

$$\frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{2^n - 2^k}{2^{k+1} - 1}.$$

これを最初の式へ戻せば

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} &= 2^n + \frac{2^n - 2^k}{2^{k+1} - 1} \\ &= \frac{2^k(2^{n+1} - 1)}{2^{k+1} - 1}. \end{aligned}$$

$k = n$ の場合も右辺は 2^n となり、式はそのまま成り立つ。

▶ 解法 2 (明示公式を帰納的に作る方法)

【方針】

(1) は大きい方の指数を固定した二重和で計算する。(2) の積表示から「 2^{n-1} を選ぶか否か」で漸化式を作り、 $a_{n,k}$ の明示公式を数学的帰納法で確かめる。(3) は明示公式の比をとり、連続する因子を消去する。

【解答】

(1)

大きい方の指数を j とすると

$$\begin{aligned} a_{n,2} &= \sum_{j=1}^{n-1} 2^j (1 + 2 + \cdots + 2^{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (4^j - 2^j) \\ &= \frac{4^n - 4}{3} - (2^n - 2) \\ &= \frac{4^n - 3 \cdot 2^n + 2}{3}. \end{aligned}$$

(2)

選んだ指数を係数として記録するため

$$f_n(x) = (1+x)(1+2x) \cdots (1+2^{n-1}x).$$

よって直ちに

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1 + 2^n x, \quad \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = 1 + x.$$

(3)

k 個を選ぶとき 2^{n-1} を選ばない場合と選ぶ場合に分けると

$$a_{n,k} = a_{n-1,k} + 2^{n-1} a_{n-1,k-1}.$$

この漸化式から数学的帰納法により

$$a_{n,k} = 2^{k(k-1)/2} \frac{(2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \cdots (2^{n-k+1} - 1)}{(2^k - 1)(2^{k-1} - 1) \cdots (2 - 1)}$$

を得る。

実際、右辺を $B_{n,k}$ とおくと

$$\frac{B_{n-1,k}}{B_{n,k}} = \frac{2^{n-k} - 1}{2^n - 1},$$

また

$$\frac{2^{n-1} B_{n-1,k-1}}{B_{n,k}} = \frac{2^{n-k}(2^k - 1)}{2^n - 1}.$$

この2つの比の和は1なので、 $B_{n,k}$ は上の漸化式を満たす。初期値も一致するから明示公式が従う。

したがって、連続する因子を消去すれば

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = 2^k \frac{2^{n+1} - 1}{2^{k+1} - 1}.$$

【総評】 難度6、計算量6。想定時間は25分程度。整式 $f_n(x)$ を積で表すことが全体の中心である。(3)では2つの恒等式から同じ係数を比較し、 $a_{n,k+1}/a_{n,k}$ を一度求めてから目的の比へ戻すと見通しがよい。明示公式を使う方法では、漸化式との整合を比の和が1になる形で確認すると計算が短い。

【第5問】

座標空間において、 xy 平面上の原点を中心とする半径1の円を考える。この円を底面とし、点 $(0, 0, 2)$ を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また、点 $A(1, 0, 2)$ を考える。

- (1) 点 P が S の底面を動くとき、線分 AP が通過する部分を T とする。平面 $z = 1$ による S の切り口および、平面 $z = 1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。
- (2) 点 P が S を動くとき、線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

▶ 解法1（高さごとのカプセル形断面を積分する方法）

【方針】

(1) は高さ1で相似比と中点を使い、2つの半径 $1/2$ の円板を描く。(2) は一般の高さ z で切り、半径 $1 - z/2$ の円板の中心が長さ $z/2$ の区間を動くことを示す。断面は円板と長方形からなるカプセル形になる。

【解答】

(1)

円錐 S の高さ $z = 1$ の切り口は、相似比 $1/2$ により原点中心、半径 $1/2$ の円板である。

底面上の点を

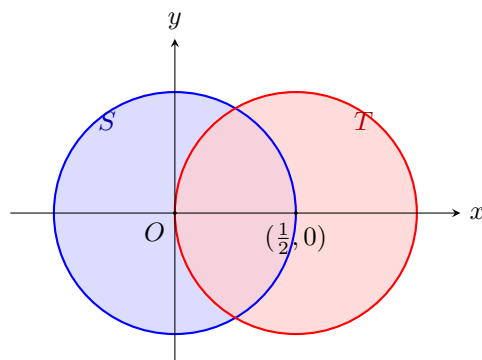
$$P = (u, v, 0), \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

とする。線分 AP と $z = 1$ の交点は中点

$$\left(\frac{1+u}{2}, \frac{v}{2}, 1 \right)$$

である。したがって T の切り口は

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}.$$



平面 $z = 1$ 上の切り口

(2)

高さ z における S の切り口の半径を

$$R = 1 - \frac{z}{2}$$

とする。線分のもう一方の端 P の高さを w とすると $0 \leq w \leq z$ であり、高さ z までの縮小率は

$$\frac{2-z}{2-w}.$$

高さ w での円錐断面の半径は $1 - w/2$ だから、線分群が高さ z に作る円板の半径は

$$\frac{2-z}{2-w} \left(1 - \frac{w}{2}\right) = 1 - \frac{z}{2} = R.$$

一方、その中心は x 軸上の

$$0 \leq x \leq \frac{z}{2}$$

を動く。したがって断面は、半径 R の円板を長さ $z/2$ だけ平行移動したカプセル形である。

断面積は

$$\pi R^2 + 2R \cdot \frac{z}{2} = \pi \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 + z \left(1 - \frac{z}{2}\right).$$

よって体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left\{ \pi \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 + z \left(1 - \frac{z}{2}\right) \right\} dz \\ &= \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2(\pi+1)}{3}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (線分の内分表示と体積分解を使う方法)

【方針】

線分上の点を $Q = (1-\lambda)A + \lambda P$ と表示する。高さ z を固定して P の高さを消去すると、断面円板の半径が $(2-z)/2$ で一定、中心だけが区間を動くことが直接分かる。体積を元の円錐部分と追加の長方形断面部分に分ける。

【解答】

(1)

$z = 1$ では、 S の断面は

$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}.$$

また底面の $P = (u, v, 0)$ と A の中点を集めると

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}.$$

よって、原点中心と $(1/2, 0)$ 中心の半径 $1/2$ の円板を同一平面に描けばよい。

(2)

$P = (p_x, p_y, w) \in S$ とし、線分上の点を

$$Q = (1-\lambda)A + \lambda P \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

とする。 Q の高さが z なら

$$z = 2(1-\lambda) + \lambda w, \quad \lambda = \frac{2-z}{2-w}.$$

高さ w の S の断面は半径 $(2-w)/2$ の円板だから、 Q の水平成分が作る円板の半径は

$$\lambda \frac{2-w}{2} = \frac{2-z}{2}.$$

これは w によらない。中心の x 座標は

$$1 - \lambda = \frac{z-w}{2-w}$$

であり、 $0 \leq w \leq z$ に対して 0 から $z/2$ まで動く。

よって断面は、円錐 S 自身の円板に、幅 $2R = 2 - z$ 、長さ $z/2$ の長方形部分を加えたものとみなせる。したがって体積も

円錐の体積 + 追加部分

に分けられ、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 2 + \int_0^2 (2-z) \frac{z}{2} dz \\ &= \frac{2\pi}{3} + \int_0^2 \left(z - \frac{z^2}{2} \right) dz \\ &= \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2(\pi+1)}{3}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 30 分程度。(1) の 2 円板を正しく描くと、(2) の一般断面が半径一定の円板の平行移動になることが見える。高さ z では半径が $1 - z/2$ 、中心の移動距離が $z/2$ である。断面積を円板だけにすると、中心移動で生じる長方形部分を落とす。

【第 6 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) A, α を実数とする。 θ の方程式

$$A \sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha) = 0$$

を考える。 $A > 1$ のとき、この方程式は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解を持つことを示せ。

- (2) 座標平面上の楕円

$$C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える。また、 $0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して、不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする。 D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r ($0 < r < 1$) が存在することを示せ。また、そのような r の最大値を求めよ。

条件： C 上の点 Q で、 Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。

▶ 解法 1 (法線条件を行列式で三角方程式にする方法)

【方針】

(1) は $\sin 2\theta = \pm 1$ となる 4 点で符号を固定し、中間値の定理を使う。(2) は楕円上の点を三角表示し、法線方向との平行条件を行列式で表す。領域 D の点では (1) の係数条件を満たすことを示し、 $r > 1/2$ には法線が 2 本しか通らない反例点を作る。

【解答】

(1)

$$F(\theta) = A \sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha)$$

とおく。 $A > 1$ より

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0, \quad F\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0, \quad F\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0, \quad F\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0.$$

さらに周期性から

$$F\left(\frac{9\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

よって中間値の定理により

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right)$$

の各区間に少なくとも 1 個の解がある。最後の解が 2π 以上なら 2π を引けば

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$$

の解になる。したがって $0 \leq \theta < 2\pi$ に少なくとも 4 個の解がある。

(2)

楕円上の点を

$$Q = (\sqrt{2} \cos \theta, \sin \theta)$$

とする。Q における法線方向は

$$(\sqrt{2} \cos \theta, 2 \sin \theta)$$

である。P = (u, v) とすると、直線 PQ が接線と直交する条件は

$$(u - \sqrt{2} \cos \theta)2 \sin \theta - (v - \sin \theta)\sqrt{2} \cos \theta = 0.$$

整理すると

$$\sin 2\theta - 2\sqrt{2}u \sin \theta + 2v \cos \theta = 0.$$

P = O なら $\sin 2\theta = 0$ となり、解は 4 個ある。以下 $P \neq O$ とし、

$$R = 2\sqrt{2u^2 + v^2}$$

とおく。ある実数 α を用いて法線条件は

$$\sin 2\theta - R \sin(\theta + \alpha) = 0$$

と書ける。

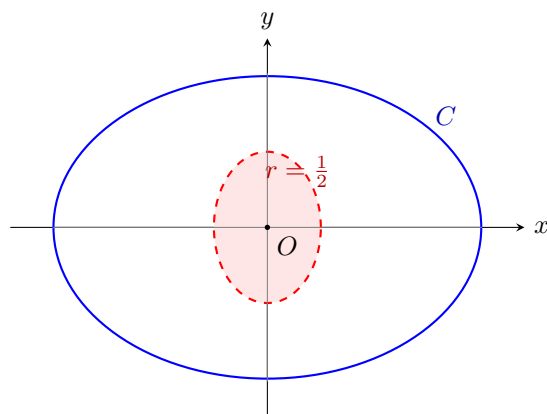
$2u^2 + v^2 < 1/4$ なら $0 < R < 1$ であり、

$$\frac{1}{R} \sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha) = 0.$$

ここで $1/R > 1$ だから (1) より少なくとも 4 個の解をもつ。したがって

$$0 < r \leq \frac{1}{2}$$

なら D 内のすべての点 P が条件を満たす。とくに $r = 1/2$ が実際に条件を満たすので、求める r は存在する。



次に $r > 1/2$ とする。 $1/2 < \rho < r$ をとり、

$$P = \left(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)$$

とおく。この点は

$$2 \left(\frac{\rho}{2} \right)^2 + \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 = \rho^2 < r^2$$

より D 内にある。法線条件は

$$\sin 2\theta - 2\rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

$\phi = \theta - \pi/4$ とおくと

$$2 \sin^2 \phi + 2 \rho \sin \phi - 1 = 0,$$

したがって

$$\sin \phi = \frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 2}}{2}.$$

$\rho > 1/2$ では負号の値は -1 より小さく、正号の値だけが $(-1, 1)$ に入る。よって $0 \leq \theta < 2\pi$ の解は 2 個しかない。したがって $r > 1/2$ は不適である。

以上より最大値は

$$r = \frac{1}{2}.$$

▶ 解法 2 (楕円座標で点を表し端点反例を作る方法)

【方針】

(1) は中央の 3 区間で 3 解を得た後、 $F(0)$ の符号に応じて左右端の区間から第 4 解を得る。(2) は $P = (s \cos \alpha / \sqrt{2}, s \sin \alpha)$ とおき、法線方程式を直接 (1) の形へ変形する。最大性は $s = 1/2$ の点を使い、方程式の解がちょうど 3 個になる例で示す。

【解答】

(1)

$F(\theta) = A \sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha)$ とする。 $A > 1$ なので

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0, \quad F\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0, \quad F\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0, \quad F\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0.$$

したがって中央の 3 区間

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

にそれぞれ解がある。

さらに

$$F(0) = F(2\pi) = -\sin \alpha.$$

$\sin \alpha \geq 0$ なら $F(0) \leq 0 < F(\pi/4)$ なので

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$$

に解がある。 $\sin \alpha < 0$ なら

$$F\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0 < F(2\pi)$$

なので $7\pi/4 < \theta < 2\pi$ に解がある。これで少なくとも 4 個の解が得られる。

(2)

D 内の原点でない点を

$$P = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \cos \alpha, s \sin \alpha \right), \quad 0 < s < r$$

と表す。楕円上の点を

$$Q = (\sqrt{2} \cos \theta, \sin \theta)$$

とすると、 Q における接線は

$$\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} x + \sin \theta y = 1.$$

法線が P を通る条件を整理すると

$$\frac{1}{2s} \sin 2\theta - \sin(\theta - \alpha) = 0.$$

$s < 1/2$ なら $1/(2s) > 1$ だから (1) を適用でき、少なくとも 4 個の Q が得られる。原点では 4 本の座標軸方向の法線を通る。よって $r = 1/2$ は条件を満たす。

最大性を示す。 $r > 1/2$ なら

$$s = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{7\pi}{4}$$

で表される点 P は D 内にある。このとき法線条件は

$$\sin 2\theta - \sin \left(\theta - \frac{7\pi}{4} \right) = 0,$$

すなわち

$$\sin 2\theta = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right).$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ で解くと

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{11\pi}{12}, \quad \frac{19\pi}{12}$$

の 3 個だけである。したがってこの P は条件を満たさず、 $r > 1/2$ は不可能である。よって最大値は

$$\frac{1}{2}$$

である。

【総評】 難度 9、計算量 8。想定時間は 40 分程度。(1) は関数値の符号を 4 回交互に固定して解の存在を保証する。(2) では接線に垂直な PQ を「 P を通る法線」と読み替え、法線条件を (1) と同型の三角方程式へ落とす。 $r = 1/2$ の十分性だけでなく、 $r > 1/2$ に対する具体的な反例点で解が 4 個未満になることまで示して最大性を確定する。