

東京大学 2021 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a, b を実数とする。座標平面上の放物線

$$C: y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち、一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし、他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

- (1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。
- (2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

▶ 解法 1 (根の位置から媒介表示する)

【方針】

共有点の x 座標は $h(x) = 2x^2 + ax + b$ の 2 解である。(1) は $h(-1), h(0), h(1)$ の符号から係数領域を得る。(2) は 2 解を $-1 < s < 0 < t < 1$ において a, b を表し、固定した x に対する双一次式の上限・下限を長方形の 4 隅で比較する。係数領域と通過領域をともに図示し、境界を含まないことを破線で表す。

【解答】

(1) 2 つの放物線の共有点の x 座標は

$$h(x) = 2x^2 + ax + b = 0$$

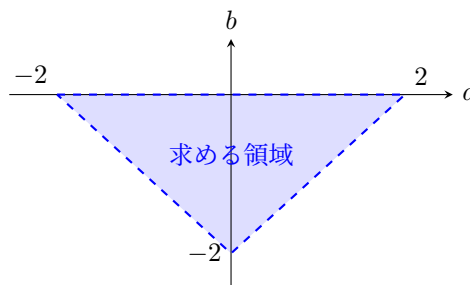
の解である。 h は下に凸であるから、 $(-1, 0)$ と $(0, 1)$ に 1 解ずつもつことは

$$h(-1) > 0, \quad h(0) < 0, \quad h(1) > 0$$

と同値である。よって

$$b < 0, \quad b > a - 2, \quad b > -a - 2$$

を得る。これは 3 点 $(-2, 0), (2, 0), (0, -2)$ を頂点とする三角形の内部であり、境界は含まない。



(2) 2 解を $-1 < s < 0 < t < 1$ とおくと

$$2x^2 + ax + b = 2(x - s)(x - t)$$

より

$$a = -2(s + t), \quad b = 2st$$

である。固定した x に対し、放物線上の y 座標は

$$Y(s, t) = x^2 - 2(s + t)x + 2st$$

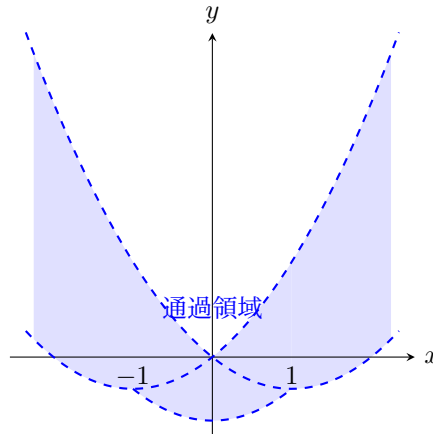
となる。これは s, t の双一次式なので、長方形 $-1 < s < 0, 0 < t < 1$ における上限・下限は 4 隅の値

$$x^2 + 2x, \quad x^2 - 2, \quad x^2, \quad x^2 - 2x$$

の最大・最小である。端は許されないで、上限・下限はいずれも到達しない。比較すると通過領域は

$$\begin{cases} x^2 + 2x < y < x^2 - 2x & (x < -1), \\ x^2 - 2 < y < x^2 - 2x & (-1 \leq x < 0), \\ x^2 - 2 < y < x^2 + 2x & (0 \leq x \leq 1), \\ x^2 - 2x < y < x^2 + 2x & (1 < x) \end{cases}$$

である。



▶ 解法 2 (係数領域を直線で切る)

【方針】

(1) で得た係数領域を利用する。(2) の条件を $y - x^2 = ax + b$ と見れば、右辺は開三角形上の一次関数であり、3 頂点での値 $-2x, 2x, -2$ の最小値と最大値の間を動く。

【解答】

(1) 2 根を $-1 < s < 0 < t < 1$ とおくと $a = -2(s+t), b = 2st$ であり、 $b < 0, b - a + 2 > 0, b + a + 2 > 0$ を得る。逆にこれらは $h(-1) > 0, h(0) < 0, h(1) > 0$ を表す。したがって係数領域は解法 1 で求めた、3 頂点 $(-2, 0), (2, 0), (0, -2)$ をもつ開三角形である。

(2) 点 (x, y) を通る条件を $y - x^2 = ax + b$ と書く。固定した x に対し、右辺は (a, b) の一次関数であり、開三角形の 3 頂点での値は $-2x, 2x, -2$ である。この見方では、固定した x ごとに係数平面を平行な直線で切り、その直線が領域を横切るかどうかだけを調べればよい。三角形は凸かつ連結なので、一次関数 $ax + b$ の値は最小の頂点値と最大の頂点値の間をすべて動く。ただし領域が開いているため両端の値は取らない。したがって直線が開三角形と交わるための必要十分条件は

$$\min\{-2x, 2x, -2\} < y - x^2 < \max\{-2x, 2x, -2\}$$

である。

$x < -1$ では $2x < -2 < -2x$, $-1 \leq x < 0$ では $-2 \leq 2x < -2x$, $0 \leq x \leq 1$ では $-2 \leq -2x \leq 2x$, $1 < x$ では $-2x < -2 < 2x$ である。よって解法 1 に示した 4 つの不等式を得る。大小が等しくなる $x = -1, 0, 1$ でも上の最小値・最大値の条件がそのまま使え、3 本の境界曲線はすべて含まれない。

【総評】 難度 5、計算量 5。想定時間は 22 分程度。(1) は二次式の根の位置を符号条件へ変換する標準問題であり、境界を含まないことまで書けば十分である。(2) は共有点の 2 つの x 座標を媒介変数にする発想が得点で、固定した x に対して 4 つの端の値を比較する整理力が問われる。図示問題では不等号の向きだけでなく、境界線を含まない点を明示することが採点上重要である。

【第 2 問】

複素数 a, b, c に対して整式 $f(z) = az^2 + bz + c$ を考える。 i を虚数単位とする。

- (1) α, β, γ を複素数とする。 $f(0) = \alpha, f(1) = \beta, f(i) = \gamma$ が成り立つとき、 a, b, c をそれぞれ α, β, γ で表せ。
 (2) $f(0), f(1), f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき、 $f(2)$ のとりうる範囲を複素平面上に図示せよ。

▶ 解法 1 (実部・虚部の一次写像で求める)

【方針】

(1) は $f(0), f(1), f(i)$ から得る 3 本の一次式を解く。(2) は α, β, γ を区間 $[1, 2]$ の独立な実数と見て、 $f(2)$ の実部・虚部を一次式にする。単位立方体の 8 頂点の像を求め、その凸包の外側 6 点を順につないで六角形を描く。

【解答】

(1) $f(0) = c = \alpha$ である。また

$$a + b = \beta - \alpha, \quad -a + bi = \gamma - \alpha$$

である。両式を加えると

$$(1 + i)b = \beta + \gamma - 2\alpha$$

となるので

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta - \gamma + i(\beta + \gamma - 2\alpha)}{2}, \\ b &= \frac{(\beta + \gamma - 2\alpha)(1 - i)}{2}, \\ c &= \alpha \end{aligned}$$

である。

(2) (1) より

$$f(2) = (3\beta - \gamma - \alpha) + i(\beta + \gamma - 2\alpha)$$

である。 $\alpha = 1 + u, \beta = 1 + v, \gamma = 1 + w$ とおくと $0 \leq u, v, w \leq 1$ であり、

$$f(2) = 1 + (-u + 3v - w) + i(-2u + v + w)$$

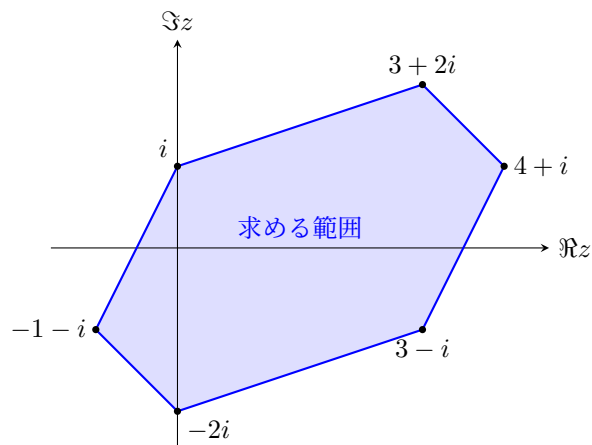
となる。立方体の 8 頂点の像は

(u, v, w)	$f(2)$	(u, v, w)	$f(2)$
$(0, 0, 0)$	1	$(1, 0, 0)$	$-2i$
$(0, 1, 0)$	$4 + i$	$(0, 0, 1)$	i
$(1, 1, 0)$	$3 - i$	$(1, 0, 1)$	$-1 - i$
$(0, 1, 1)$	$3 + 2i$	$(1, 1, 1)$	2

である。1, 2 は内部にあり、外側の 6 頂点は

$$-1 - i, \quad -2i, \quad 3 - i, \quad 4 + i, \quad 3 + 2i, \quad i$$

である。したがって求める範囲は、これらを順に結んだ六角形の周および内部である。



▶ 解法 2 (補間公式と線分の和で求める)

【方針】

3 点 $0, 1, i$ における値から 2 次式を補間する。補間基底を展開すれば (1) の係数が直ちに得られ、 $z = 2$ を代入すれば $f(2)$ は α, β, γ の一次結合になる。(2) では各値の区間幅 1 に対応する 3 本の線分の和として領域を作り、端点から六角形を得る。

【解答】

(1) 3 点 $0, 1, i$ に対する補間公式より

$$f(z) = -i\alpha(z-1)(z-i) + \frac{\beta z(z-i)}{1-i} - \frac{\gamma z(z-1)}{1+i}$$

である。実際、 $z = 0, 1, i$ を代入すれば、それぞれ α, β, γ になる。これを z について整理すると

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta - \gamma + i(\beta + \gamma - 2\alpha)}{2}, \\ b &= \frac{(\beta + \gamma - 2\alpha)(1-i)}{2}, \\ c &= \alpha \end{aligned}$$

を得る。

(2) 補間公式に $z = 2$ を代入すると

$$f(2) = (-1-2i)\alpha + (3+i)\beta + (-1+i)\gamma$$

である。 $\alpha = 1+u, \beta = 1+v, \gamma = 1+w$ とおけば

$$f(2) = 1 + u(-1-2i) + v(3+i) + w(-1+i), \quad 0 \leq u, v, w \leq 1$$

となる。

つまり点 1 から出発し、方向 $-1-2i, 3+i, -1+i$ の 3 本の線分を独立に足し合わせた領域である。端点の和を順に調べると外周の頂点は

$$-1-i, \quad -2i, \quad 3-i, \quad 4+i, \quad 3+2i, \quad i$$

となる。各係数の区間は閉区間なので、この六角形は周も含む。

【総評】 難度 5、計算量 5。想定時間は 20 分程度。(1) は複素係数の連立一次方程式を落ち着いて解く問題で、 $1+i$ で割る場面の実部・虚部の整理が小さな山である。(2) は 3 つの実数パラメータの線形像として見ると図形が明確になる。頂点候補 8 点のうち外側の 6 点だけが六角形の頂点になるため、内部点まで頂点として描かないこと、また $[1, 2]$ が閉区間なので境界を含むことが注意点である。

【第 3 問】

関数

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

に対して、 $y = f(x)$ のグラフを C とする。点 $A(1, f(1))$ における C の接線を

$$l: y = g(x)$$

とする。

- (1) C と l の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し、その点の x 座標を求めよ。
 (2) (1) で求めた共有点の x 座標を α とする。定積分

$$\int_{\alpha}^1 \{f(x) - g(x)\}^2 dx$$

を計算せよ。

【方針】

まず $f'(x)$ を求め、 $x = 1$ における接線 $g(x)$ を出す。 $f(x) = g(x)$ は接点 $x = 1$ を重解としてもつので、因数分解して残りの共有点 $x = -3$ を得る。積分では $f(x) - g(x)$ を $-(x-1)^2(x+3)/(8(x^2+3))$ と因数分解し、二乗後に部分分数分解する。多項式部分、 $1/(x^2+3)$ 、 $1/(x^2+3)^2$ をそれぞれ評価し、最後に対数項と三角置換の項を合成する。

【解答】

(1) $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$ より $f'(x) = \frac{(x^2+3) - 2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$ である。したがって $f(1) = \frac{1}{4}$, $f'(1) = \frac{1}{8}$ であるから、点 $A(1, f(1))$ における接線は $g(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(x-1) = \frac{x+1}{8}$ である。

共有点は $\frac{x}{x^2+3} = \frac{x+1}{8}$ を満たす。両辺に $8(x^2+3)$ をかけると $8x = (x+1)(x^2+3)$ すなわち $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ である。左辺は $x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3)$ と因数分解できる。 $x = 1$ は接点 A に対応するので、 A と異なる共有点はただ 1 つであり、その x 座標は $\alpha = -3$ である。

(2)

(1) の計算より

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{x}{x^2+3} - \frac{x+1}{8} \\ &= -\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{8(x^2+3)} \\ &= -\frac{(x-1)^2(x+3)}{8(x^2+3)} \end{aligned}$$

である。したがって求める積分を I とすると

$$I = \int_{-3}^1 \frac{(x-1)^4(x+3)^2}{64(x^2+3)^2} dx$$

である。

分子を展開して部分分数分解すると

$$\frac{(x-1)^4(x+3)^2}{64(x^2+3)^2} = \frac{x^2}{64} + \frac{x}{32} - \frac{15}{64} - \frac{x-7}{4(x^2+3)} - \frac{3}{(x^2+3)^2}$$

である。多項式部分の積分は

$$\int_{-3}^1 \left(\frac{x^2}{64} + \frac{x}{32} - \frac{15}{64} \right) dx = -\frac{11}{12}$$

である。

また

$$\int_{-3}^1 \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} [\log(x^2+3)]_{-3}^1 = -\frac{1}{2} \log 3$$

であり,

$$\int_{-3}^1 \frac{dx}{x^2+3} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_{-3}^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

である。

さらに $x = \sqrt{3} \tan \theta$ とおくと, $x = -3$ で $\theta = -\frac{\pi}{3}$, $x = 1$ で $\theta = \frac{\pi}{6}$ であり,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 \frac{dx}{(x^2+3)^2} &= \frac{\sqrt{3}}{9} \int_{-\pi/3}^{\pi/6} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}\pi}{36} \end{aligned}$$

である。

以上より

$$\begin{aligned} I &= -\frac{11}{12} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \log 3 \right) + \frac{7}{4} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 3 \left(\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}\pi}{36} \right) \\ &= -\frac{7}{6} + \frac{1}{8} \log 3 + \frac{5\sqrt{3}\pi}{24} \end{aligned}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 7。想定時間は 28 分程度。(1) は接線との交点なので $x = 1$ が重解になることを見越すと因数分解しやすい。(2) は発想よりも計算の正確さが問われ、部分分数分解、対数項、 $(x^2+3)^{-2}$ の三角置換を順に処理する必要がある。符号を 1 か所誤ると最終値が大きく崩れるため、 $f-g$ の因数分解を最初に確定させるのが有効である。

【第 4 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする。 K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば、 A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。
- (2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする。このとき、 $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$, $B = {}_aC_b$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。
- (3) a, b は (2) の通りとし、さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。 ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。
- (4) ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

【方針】

(1) は奇数が 4 を法として逆元をもつことを使う。(2) は正整数 M に含まれる 2 の個数を $\nu(M)$ とし、 $\nu((4m)!) = 3m + \nu(m!)$ を用いて 2 つの二項係数に含まれる 2 の個数が等しいことを示す。(3) は階乗から 2 をすべて除いた奇数部分を 4 を法として比較する。 $a-b$ が偶数なら符号因子が打ち消し合う。(4) は (3) を 2 回適用する。

【解答】

(1) 仮定より

$$KA = LB, \quad K \equiv L \pmod{4}$$

である。奇数 K は $K^2 \equiv 1 \pmod{4}$ を満たすので、4 を法として逆元をもつ。したがって合同式 $KA \equiv LB \pmod{4}$ の両辺に K の逆元をかけ、 $K \equiv L \pmod{4}$ を用いれば

$$A \equiv B \pmod{4}$$

を得る。

(2) 正整数 M を割り切る 2 の最大の累乗の指数を $\nu(M)$ と書く。 $(4m)!$ では、2 の倍数から少なくとも $2m$ 個、4 の倍数からさらに m 個の 2 が現れ、4 の倍数に残る追加分は $m!$ に含まれる 2 の個数と一致する。よって

$$\nu((4m)!) = 3m + \nu(m!)$$

である。また $4m+1$ は奇数なので $\nu((4m+1)!) = \nu((4m)!)$ である。

$n = a - b$ とおき,

$$A = {}_{4a+1}C_{4b+1}, \quad B = {}_aC_b$$

とする。上の関係から

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu((4a+1)!) - \nu((4b+1)!) - \nu((4n)!) \\ &= \{3a + \nu(a!)\} - \{3b + \nu(b!)\} - \{3n + \nu(n!)\} \\ &= \nu(B) \end{aligned}$$

である。共通の値を e とし

$$A = 2^e A_0, \quad B = 2^e B_0$$

と書けば, A_0, B_0 は正の奇数である。そこで

$$K = B_0, \quad L = A_0$$

とおけば, $KA = LB$ が成り立つ。

(3) 正整数 m に対し, $m!$ から 2 の因子をすべて除いた奇数部分を O_m とする。 $1, 2, \dots, 4m$ を 4 個ずつに分けて奇数部分を比べる。

$4j$ の奇数部分は j の奇数部分であり, $4j-2$ の奇数部分は $2j-1$ である。また

$$(4j-3)(4j-1) \equiv -1 \pmod{4}$$

である。さらに $1, 3, 5, \dots, 2m-1$ のうち 4 で割って 3 余るものは $\lfloor m/2 \rfloor$ 個なので

$$O_{4m} \equiv O_{4m+1} \equiv (-1)^{m+\lfloor m/2 \rfloor} O_m \pmod{4}$$

となる。ここで

$$\varepsilon_m = (-1)^{m+\lfloor m/2 \rfloor}$$

とおく。

二項係数から 2 の因子を除いた奇数部分を比較すると, (2) で得た A_0, B_0 について

$$A_0 \equiv \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_n B_0 \pmod{4}$$

である。いま $n = a - b$ は偶数である。 $a = b + n$ を用いると, $\varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_n$ の指数の偶奇は

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + \frac{n}{2} = 2 \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + n$$

の偶奇に等しく, これは偶数である。したがって

$$A_0 \equiv B_0 \pmod{4}$$

となる。(2) で選んだ $K = B_0, L = A_0$ は 4 で割った余りが等しいので, (1) より

$${}_{4a+1}C_{4b+1} \equiv {}_aC_b \pmod{4}$$

を得る。

(4)

$$2021 = 4 \cdot 505 + 1, \quad 37 = 4 \cdot 9 + 1$$

で, $505 - 9 = 496$ は偶数であるから, (3) より

$${}_{2021}C_{37} \equiv {}_{505}C_9 \pmod{4}$$

である。さらに

$$505 = 4 \cdot 126 + 1, \quad 9 = 4 \cdot 2 + 1$$

で, $126 - 2 = 124$ も偶数なので

$${}_{505}C_9 \equiv {}_{126}C_2 \pmod{4}$$

である。最後に

$${}_{126}C_2 = \frac{126 \cdot 125}{2} = 63 \cdot 125 \equiv 3 \pmod{4}$$

より, 求める余りは

である。

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 30 分程度。巨大な二項係数を計算するのではなく、2 の因子と奇数部分に分離して 4 を法とする情報を保つ問題である。(2) の核は $\nu((4m)!) = 3m + \nu(m!)$ で、これにより 2 つの二項係数の 2 進指数が一致する。(3) では 2 を除いた階乗の奇数部分を 4 個ずつ整理し、 $a - b$ が偶数であることが符号を打ち消す箇所を明示する必要がある。誘導の役割をつなげて書けば、使用する道具は高校数学の整数・合同式の範囲に収まる。

【第 5 問】

α を正の実数とする。 $0 \leq \theta \leq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を、座標平面上の 2 点 $A(-\alpha, -3)$, $P(\theta + \sin \theta, \cos \theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める。

(1) $0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる θ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ。

$0 \leq \theta \leq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は、区間 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

▶ 解法 1 (半角公式で臨界点を追う)

【方針】

距離の 2 乗をそのまま展開して微分する。整理すると $f'(\theta)$ の符号は $(1 + \cos \theta)(\theta + \alpha) - 2 \sin \theta$ の符号で決まり、 $0 < \theta < \pi$ では $1 + \cos \theta > 0$ なので $f'(\theta) = 0$ は $\alpha = 2 \tan(\theta/2) - \theta$ と同値になる。この右辺を $\phi(\theta)$ とおき、 $\phi'(\theta) > 0$ と端の極限から臨界点の一意性を示す。最大点は符号変化によりその臨界点であり、それが $(0, \pi/2)$ に入る条件を $\alpha < \phi(\pi/2)$ として読む。

【解答】

(1)

点 $A(-\alpha, -3)$, $P(\theta + \sin \theta, \cos \theta)$ より $f(\theta) = (\theta + \sin \theta + \alpha)^2 + (\cos \theta + 3)^2$ である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f'(\theta) &= (\theta + \sin \theta + \alpha)(1 + \cos \theta) - (\cos \theta + 3) \sin \theta \\ &= (1 + \cos \theta)(\theta + \alpha) - 2 \sin \theta \end{aligned}$$

である。 $0 < \theta < \pi$ では $1 + \cos \theta > 0$ であるから、 $f'(\theta) = 0$ は $\theta + \alpha = \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos \theta}$ と同値である。半角の公式より $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$ なので $\alpha = 2 \tan \frac{\theta}{2} - \theta$ となる。

ここで $\phi(\theta) = 2 \tan \frac{\theta}{2} - \theta$ とおくと $\phi'(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)} - 1 = \tan^2 \frac{\theta}{2} > 0$ である。さらに

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \phi(\theta) = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi-} \phi(\theta) = +\infty$$

である。 $\alpha > 0$ であるから、方程式 $\phi(\theta) = \alpha$ は $0 < \theta < \pi$ にただ 1 つの解をもつ。したがって $f'(\theta) = 0$ となる θ もただ 1 つ存在する。

(2)

(1) の計算より $\frac{1}{2}f'(\theta) = (1 + \cos \theta)\{\alpha - \phi(\theta)\}$ である。 $1 + \cos \theta > 0$ であり、 ϕ は単調増加であるから、 $\phi(\theta) = \alpha$ を満たすただ 1 つの点を θ_0 とすると

$$f'(\theta) > 0 \quad (0 < \theta < \theta_0), \quad f'(\theta) < 0 \quad (\theta_0 < \theta < \pi)$$

である。よって $f(\theta)$ は θ_0 で最大値をとる。

この最大点が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ にあることは $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ と同値である。 ϕ は単調増加なので、これは $\alpha = \phi(\theta_0) < \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ と同値である。ここで

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

である。

また α は正の実数である。したがって求める範囲は $0 < \alpha < 2 - \frac{\pi}{2}$ である。等号の場合は最大点が $\theta = \pi/2$ になり、指定された開区間には入らない。

▶ 解法 2 (半角の正接を新変数にする)

【方針】

微分して得られる臨界点条件に $u = \tan(\theta/2)$ を入れると, α は $\Psi(u) = 2u - 2\arctan u$ と等しくなる。 Ψ は $u > 0$ で狭義単調増加し, 0 から無限大まで動くので解は一意である。最大点が $(0, \pi/2)$ にある条件は $0 < u < 1$ と同値なので, $\Psi(1)$ と比較する。

【解答】

(1) 距離の 2 乗を微分すると

$$\frac{1}{2}f'(\theta) = (1 + \cos \theta)(\theta + \alpha) - 2\sin \theta$$

である。 $0 < \theta < \pi$ で

$$u = \tan \frac{\theta}{2}$$

とおくと $u > 0$, $\theta = 2\arctan u$ であり,

$$\frac{2\sin \theta}{1 + \cos \theta} = 2u$$

である。したがって $f'(\theta) = 0$ は

$$\alpha = 2u - 2\arctan u$$

と同値である。

$$\Psi(u) = 2u - 2\arctan u$$

とおくと

$$\Psi'(u) = 2 - \frac{2}{1+u^2} = \frac{2u^2}{1+u^2} > 0 \quad (u > 0)$$

である。また $u \rightarrow 0+$ で $\Psi(u) \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$ で $\Psi(u) \rightarrow \infty$ である。よって $\alpha > 0$ に対し $\Psi(u) = \alpha$ は正の解をただ 1 つもち, 対応する θ も $(0, \pi)$ にただ 1 つ存在する。

(2) $f'(\theta)$ の符号は $\alpha - \Psi(u)$ の符号と一致する。 $u = \tan(\theta/2)$ も $\Psi(u)$ も単調増加なので, 唯一の臨界点の前で $f' > 0$, 後で $f' < 0$ となる。したがってその点が最大点である。

最大点が $0 < \theta < \pi/2$ にあることは

$$0 < u < 1$$

と同値である。 Ψ の単調性より, これは

$$0 < \alpha < \Psi(1) = 2 - 2\arctan 1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

と同値である。よって求める範囲は

$$0 < \alpha < 2 - \frac{\pi}{2}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 22 分程度。距離の 2 乗を微分した後, $\sin \theta / (1 + \cos \theta) = \tan(\theta/2)$ に気づけるかが中心である。臨界点が 1 つ存在するだけでなく, その前後で f' の符号が正から負に変わることを確認して最大点だと示す必要がある。(2) では $\theta = \pi/2$ が含まれないため, $\alpha = 2 - \pi/2$ を除く点が典型的なミスである。

【第 6 問】

実数 b, c, p, q, r に対し,

$$x^4 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p \neq 0$ であるとき, q, r を p, b で表せ。

(2) $p \neq 0$ とする。 b, c が定数 a を用いて

$$b = (a^2 + 1)(a + 2), \quad c = -\left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

と表されているとき, 有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2 - (a^2 + 1)\}\{p^4 + f(a)p^2 + g(a)\} = 0$$

を満たすものを 1 組求めよ。

(3) a を整数とする。 x の 4 次式

$$x^4 + (a^2 + 1)(a + 2)x - \left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。

【方針】

まず右辺を展開して係数比較を行い, $q + r = p^2$, $p(r - q) = b$, $qr = c$ を得る。(1) は和と差から q, r を求める。(2) は $y = p^2$ とおき, $c = qr$ に (1) の式を代入して $y^3 - 4cy - b^2 = 0$ を作る。与えられた b, c を代入すると $y = a^2 + 1$ が解になるので因数分解し, 求める f, g を読む。(3) は有理係数の二次式分解なら p, q, r を有理数に取れることを確認し, $p = 0$ を除外したうえで $p^2 = a^2 + 1$ が有理数の平方になる整数 a を決める。

【解答】

(1)

右辺を展開すると

$$(x^2 + px + q)(x^2 - px + r) = x^4 + (q + r - p^2)x^2 + p(r - q)x + qr$$

である。これが $x^4 + bx + c$ と恒等的に等しいので, 係数比較より $q + r = p^2$, $p(r - q) = b$, $qr = c$ である。

いま $p \neq 0$ だから $r - q = \frac{b}{p}$ である。和 $q + r = p^2$ と差 $r - q = b/p$ から

$$q = \frac{1}{2}\left(p^2 - \frac{b}{p}\right), \quad r = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{b}{p}\right)$$

である。

(2) $y = p^2$ とおく。(1) より

$$qr = \frac{1}{4}\{(q + r)^2 - (r - q)^2\} = \frac{1}{4}\left(p^4 - \frac{b^2}{p^2}\right)$$

である。 $qr = c$ だから $c = \frac{1}{4}\left(y^2 - \frac{b^2}{y}\right)$ であり, 両辺に $4y$ をかけると $y^3 - 4cy - b^2 = 0$ を得る。

ここで $b = (a^2 + 1)(a + 2)$, $c = -\left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$ を代入すると $y^3 + (4a + 3)(a^2 + 1)y - (a^2 + 1)^2(a + 2)^2 = 0$ である。この左辺は $\{y - (a^2 + 1)\}\{y^2 + (a^2 + 1)y + (a^2 + 1)(a + 2)^2\}$ と因数分解できる。したがって $y = p^2$ に戻せば $\{p^2 - (a^2 + 1)\}\{p^4 + (a^2 + 1)p^2 + (a^2 + 1)(a + 2)^2\} = 0$ である。

よって, 例えば $f(t) = t^2 + 1$, $g(t) = (t^2 + 1)(t + 2)^2$ とすればよい。

(3)

与えられた 4 次式が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるとする。先頭係数は 1 であり, x^3 の係数は 0 なので, 必要なら各因子を定数倍して $(x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$ と書ける。ただし p, q, r は有理数である。

まず $p = 0$ の場合を調べる。このとき右辺の x の係数は 0 であるから $(a^2 + 1)(a + 2) = 0$ でなければならない。整数 a では $a = -2$ だけが候補である。しかし $a = -2$ のとき定数項は $-\left(-2 + \frac{3}{4}\right)(5) = \frac{25}{4}$ であり, $p = 0$ なら $q + r = 0$,

$qr = 25/4$ が必要になる。これは $-q^2 = \frac{25}{4}$ を意味し、実数 q では不可能である。したがって $p = 0$ は起こらない。

よって $p \neq 0$ としてよい。(2) より、 $y = p^2$ は $y = a^2 + 1$ または $y^2 + (a^2 + 1)y + (a^2 + 1)(a + 2)^2 = 0$ を満たす。ところが $y = p^2 > 0$ であり、 $a^2 + 1 > 0$ なので、後者の左辺は正である。したがって後者は不可能で、必ず $p^2 = a^2 + 1$ である。 p は有理数である。整数 $a^2 + 1$ が有理数の平方であるなら、それは整数の平方である。よってある整数 $m \geq 0$ を用いて $a^2 + 1 = m^2$ と書ける。これは $(m - a)(m + a) = 1$ を意味する。2つの因数は整数なので $m - a = 1$, $m + a = 1$ であり、 $a = 0$ を得る。

実際、 $a = 0$ のとき与えられた4次式は $x^4 + 2x - \frac{3}{4}$ であり、 $x^4 + 2x - \frac{3}{4} = (x^2 + x - \frac{1}{2})(x^2 - x + \frac{3}{2})$ と有理数係数の2次式の積に分解できる。したがって求める整数は $a = 0$ のみである。

【総評】 難度 7、計算量 7。想定時間は 30 分程度。係数比較から q, r を消去し、 $y = p^2$ の方程式に落とす代数処理が中心である。(2) の因数分解は長いですが、 $y = a^2 + 1$ が解になることを意識すると整理しやすい。(3) では有理係数分解から p, q, r を有理数に取る説明、 $p = 0$ の除外、正の y に対する二次因子の不可能性、整数平方の判定までを順に書く必要がある。