

横浜国立大学 2016 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 5, \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{2}{3}a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3 を求めよ。
- (2) a_{n+2} を a_n, a_{n+1} を用いて表せ。
- (3) 一般項 a_n を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は与式に $n = 1, 2$ を代入して順に求める。(2) は n と $n + 1$ の式を差し、引き算で和を消去する。(3) は得られた 2 項間でない線形漸化式を特性方程式で解き、初期値から定数を決める。

【解答】

(1) $n = 1$ とすると

$$25 = \frac{2}{3} \cdot 5a_2$$

より $a_2 = \frac{15}{2}$ である。次に $n = 2$ とすると

$$25 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{2} a_3 = 5a_3$$

より $a_3 = \frac{65}{4}$ である。(2) 与式の左辺は正であるから、すべての n について $a_n \neq 0$ である。 $n + 1$ の式から n の式を引くと

$$a_{n+1}^2 = \frac{2}{3}a_{n+1}a_{n+2} - \frac{2}{3}a_n a_{n+1}$$

である。 $a_{n+1} \neq 0$ より

$$a_{n+2} = a_n + \frac{3}{2}a_{n+1}$$

を得る。

(3) 特性方程式は

$$r^2 = \frac{3}{2}r + 1, \quad 2r^2 - 3r - 2 = 0$$

であるから、 $r = 2, -\frac{1}{2}$ である。したがって

$$a_n = A2^{n-1} + B\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

とおける。 $a_1 = 5, a_2 = \frac{15}{2}$ より

$$A + B = 5, \quad 2A - \frac{1}{2}B = \frac{15}{2}$$

である。これを解いて $A = 4, B = 1$ 。よって

$$a_n = 2^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。

▶ 別解 (2 つの等比数列に分ける)

【方針】

(1) 初項条件から順に数値を決める。(2) 部分和を S_n と書き, $S_{n+1} - S_n$ を取る。(3) 特性方程式を使わず, $a_{n+1} - 2a_n$ と $a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$ がそれぞれ等比数列になることを利用する。

【解答】

(1) $n = 1$ の条件から

$$25 = \frac{10}{3}a_2$$

となるので,

$$a_2 = \frac{15}{2}.$$

さらに $n = 2$ の条件から

$$25 + \frac{225}{4} = 5a_3$$

となるので,

$$a_3 = \frac{65}{4}.$$

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2 = \frac{2}{3}a_n a_{n+1}$$

とおく。 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}^2$ だから,

$$a_{n+1}^2 = \frac{2}{3}a_{n+1}(a_{n+2} - a_n).$$

一方, $S_n > 0$ より $a_n a_{n+1} > 0$ であり, 特に $a_{n+1} \neq 0$ である。したがって

$$a_{n+2} = a_n + \frac{3}{2}a_{n+1}.$$

(3) 次の 2 数列を考える。

$$b_n = a_{n+1} - 2a_n, \quad c_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n.$$

(2) の漸化式から

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n, \quad c_{n+1} = 2c_n.$$

初期値は

$$b_1 = -\frac{5}{2}, \quad c_1 = 10$$

であるから,

$$b_n = -\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad c_n = 10 \cdot 2^{n-1}.$$

ここで $c_n - b_n = \frac{5}{2}a_n$ なので,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{5}(c_n - b_n) \\ &= 4 \cdot 2^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 2^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

これが求める一般項である。

【総評】 難度 5, 計算量 4. 想定時間は 15 分程度。和の式をそのまま扱わず, 隣り合う式の差を取って漸化式に直すところを中心である。 $a_{n+1} \neq 0$ の確認を入れて割り算の条件を落とさないこと, 初期値 a_2 の分数計算を正確に処理することが得点の分かれ目になる。

【第 1 問】

次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \frac{\log(1-x)}{x}$ は $0 < x < 1$ の範囲で減少することを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) 導関数の分子を直接評価する。 $x/(1-x) + \log(1-x)$ を補助関数として調べ、これが正であることから $f'(x) < 0$ を示す。

【解答】

(1) $0 < x < 1$ で

$$f'(x) = \frac{-\frac{x}{1-x} - \log(1-x)}{x^2}$$

である。ここで

$$g(x) = \frac{x}{1-x} + \log(1-x)$$

とおくと,

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2} > 0$$

であり, $g(0) = 0$ だから $0 < x < 1$ で $g(x) > 0$ である。したがって

$$-\frac{x}{1-x} - \log(1-x) = -g(x) < 0$$

となるので, $f'(x) < 0$ 。よって $f(x)$ は $0 < x < 1$ で減少する。

▶ 別解 (積分の平均値として見る)

【方針】

$-\log(1-x)$ を積分で表し, 増加関数 $1/(1-t)$ の区間平均が上端 x とともに増加することを示す。

【解答】

$0 < x < 1$ において

$$-\log(1-x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

である。そこで

$$A(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

とおけば, $f(x) = -A(x)$ である。

関数 $h(t) = \frac{1}{1-t}$ は $[0, x]$ で狭義単調増加するので, $0 \leq t < x$ なら $h(t) < h(x)$ である。したがって

$$\int_0^x h(t) dt < xh(x).$$

一方, 積分の上端を含む関数の微分により

$$A'(x) = \frac{xh(x) - \int_0^x h(t) dt}{x^2} > 0.$$

よって $A(x)$ は増加し, その符号を反転した

$$f(x) = -A(x) = \frac{\log(1-x)}{x}$$

は $0 < x < 1$ で減少する。

【総評】 難度 3, 計算量 3。想定時間は 8 分程度。導関数の符号を補助関数で処理する標準問題である。 $\log(1-x)$ の微分の符号と, $x^2 > 0$ によって導関数全体の符号が決まる点を丁寧に書けば安定して得点できる。

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(2) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan \left(\frac{(n+k)\pi}{6n} \right)}$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(2) 和を k/n の関数値の平均と見て, 定積分に移す。被積分関数は $\cot((1+x)\pi/6)$ であり, $u = (1+x)\pi/6$ と置換して

$$\int \cot u \, du = \log \sin u$$

を用いる。

【解答】

(2) 与えられた和は

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan \left(\frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)}$$

である。したがって, $n \rightarrow \infty$ で

$$\int_0^1 \frac{1}{\tan \left(\frac{\pi}{6} (1+x) \right)} dx$$

に収束する。 $u = \frac{\pi}{6}(1+x)$ とおくと

$$\int_0^1 \frac{dx}{\tan \left(\frac{\pi}{6} (1+x) \right)} = \frac{6}{\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos u}{\sin u} du = \frac{6}{\pi} [\log \sin u]_{\pi/6}^{\pi/3}.$$

よって求める極限值は

$$\frac{6}{\pi} \log \frac{\sin(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} = \frac{6}{\pi} \log \sqrt{3} = \frac{3 \log 3}{\pi}$$

である。

▶ 別解（単調性による積分評価）

【方針】

区分求積公式を直接引用する代わりに、 $\cot x$ の単調減少性を使って和を左右の長方形和ではさみ、極限を定積分へ移す。

【解答】

$$\Delta = \frac{\pi}{6n}, \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + k\Delta \quad (0 \leq k \leq n)$$

とおく。 $\cot x$ は $[\pi/6, \pi/3]$ で単調減少するから、各小区間での左右端の値を比べて

$$\Delta \sum_{k=1}^n \cot \theta_k \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot x \, dx \leq \Delta \sum_{k=0}^{n-1} \cot \theta_k$$

を得る。両端の和の差は $\Delta\{\cot(\pi/6) - \cot(\pi/3)\} \rightarrow 0$ だから、はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \sum_{k=1}^n \cot \theta_k = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot x \, dx.$$

求める和では $1/n = (6/\pi)\Delta$ だから、その極限は

$$\begin{aligned} \frac{6}{\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot x \, dx &= \frac{6}{\pi} [\log(\sin x)]_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= \frac{6}{\pi} \log \sqrt{3} \\ &= \frac{3 \log 3}{\pi}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 5，計算量 4。想定時間は 12 分程度。和の中の角を $1 + k/n$ の形に直して定積分へ移せるかが中心である。端点は $\pi/6$ から $\pi/3$ で、0 や $\pi/2$ にしてしまうと答えが変わる。

【第 3 問】

四面体 $OABC$ があり、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。三角形 ABC の重心を G とする。点 D, E, P を $\overrightarrow{OD} = 2\vec{b}, \overrightarrow{OE} = 3\vec{c}, \overrightarrow{OP} = 6\overrightarrow{OG}$ をみたす点とし、平面 ADE と直線 OP の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 三角形 ADE の面積を S_1 ，三角形 QDE の面積を S_2 とするとき、 $\frac{S_1}{S_2}$ を求めよ。
- (3) 四面体 $OADE$ の体積を V_1 ，四面体 $PQDE$ の体積を V_2 とするとき、 $\frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は Q を直線 OP 上の点として表す一方、平面 ADE 上の点としても表し、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の係数を比較する。(2) は三角形 ADE における Q の重心座標のうち、頂点 A に対応する係数が高さの比になることを使う。(3) は O, Q, P が一直線上にあるので、平面 ADE への距離の比を $OQ : PQ$ から求める。

【解答】

(1) G は三角形 ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \overrightarrow{OP} = 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

である。 Q は直線 OP 上にあるので

$$\overrightarrow{OQ} = 2t(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

とおく。一方、 Q は平面 ADE 上にあるから

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + u(2\vec{b} - \vec{a}) + v(3\vec{c} - \vec{a}) = (1 - u - v)\vec{a} + 2u\vec{b} + 3v\vec{c}$$

と表せる。係数比較により

$$\begin{aligned} 2t &= 1 - u - v, \\ 2t &= 2u, \\ 2t &= 3v \end{aligned}$$

である。したがって $u = t, v = \frac{2t}{3}$ であり, $2t = 1 - t - \frac{2t}{3}$ から $t = \frac{3}{11}$ 。よって

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{6}{11}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

である。

(2) (1) より, 三角形 ADE において

$$Q = \frac{6}{11}A + \frac{3}{11}D + \frac{2}{11}E$$

と表される。したがって, 辺 DE を底辺としたときの Q の高さは, A の高さの $\frac{6}{11}$ 倍である。よって

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{6}{11}$$

であり, 求める比は

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{11}{6}$$

である。

(3) Q は OP を $OQ : QP = 3 : 8$ に内分する。平面 ADE は QDE を含むので, P から平面 ADE までの距離と O から平面 ADE までの距離の比は

$$PQ : OQ = 8 : 3$$

である。また (2) より $S_2/S_1 = 6/11$ 。したがって

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{8}{3} = \frac{6}{11} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{11}$$

である。

▶ 別解 (斜交座標と平面の切片形)

【方針】

斜交座標で平面 ADE を切片形にし, 交点・面積比・体積比を同じ一次式から求める。

【解答】

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は四面体の 3 辺を表すので一次独立である。位置ベクトル

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

をもつ点を斜交座標 (x, y, z) で表す。この座標で

$$A = (1, 0, 0), \quad D = (0, 2, 0), \quad E = (0, 0, 3)$$

だから, 平面 ADE の方程式は切片形により

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1. \quad (*)$$

(1) G は ABC の重心なので

$$P = (2, 2, 2).$$

直線 OP 上の点を $(2t, 2t, 2t)$ とし, これを (*) に代入すると

$$2t + t + \frac{2t}{3} = 1.$$

よって $t = \frac{3}{11}$ であり,

$$Q = \left(\frac{6}{11}, \frac{6}{11}, \frac{6}{11} \right).$$

したがって

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{6}{11}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

(2) 頂点 A, D, E に関する Q の重心座標は

$$Q = \frac{6}{11}A + \frac{3}{11}D + \frac{2}{11}E$$

である。辺 DE を共通の底辺とすると、 Q の高さは A の高さの $6/11$ 倍だから、

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{6}{11}.$$

ゆえに

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{11}{6}.$$

(3) (*) の左辺を $L(x, y, z)$ とする。平行な 2 平面までの符号付き距離は $L - 1$ に比例する。ここで

$$L(O) = 0, \quad L(P) = 2 + 1 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

だから、 O, P から平面 ADE までの距離の比は

$$1 : \left(\frac{11}{3} - 1 \right) = 1 : \frac{8}{3}.$$

したがって、底面積比も合わせると

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{8}{3} = \frac{6}{11} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{11}.$$

【総評】 難度 5, 計算量 5. 想定時間は 18 分程度。係数比較で Q の位置を決めれば、面積比と体積比は同じ情報から続けて処理できる。 $D = 2\vec{b}$, $E = 3\vec{c}$ を頂点係数に戻すところで係数を取り違えると、後半の比が連鎖的に崩れる。

【第 4 問】

a を正の定数とする。2 つの曲線 $C_1 : y = x \log x$ と $C_2 : y = ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$ は証明なしに用いてよい。

▶ 解法 1

【方針】

C_1 の接点を $t > 0$, C_2 の接点を s として、共通接線の傾きと切片を一致させる。 $u = as$ とおくと、解の個数は $2 \log |u| - 2u + 1 = \log a$ の解の個数になるので、 $u < 0$ と $u > 0$ に分けて増減を調べる。

【解答】

C_1 上の $x = t$ ($t > 0$) における接線は

$$y = (\log t + 1)x - t$$

である。また、 C_2 上の $x = s$ における接線は

$$y = 2asx - as^2$$

である。両者が一致する条件は

$$\log t + 1 = 2as, \quad t = as^2$$

である。 $u = as$ とおくと $t = u^2/a$ であり、条件は

$$\log \frac{u^2}{a} + 1 = 2u$$

すなわち

$$2 \log |u| - 2u + 1 = \log a \quad (u \neq 0)$$

となる。

$\phi(u) = 2 \log |u| - 2u + 1$ とおく。 $u < 0$ では

$$\phi'(u) = \frac{2}{u} - 2 < 0$$

であり、 $u \rightarrow -\infty$ で $\phi(u) \rightarrow \infty$ 、 $u \rightarrow 0^-$ で $\phi(u) \rightarrow -\infty$ である。したがって負の解は常に 1 個ある。

次に $u > 0$ では $\phi'(u) = \frac{2}{u} - 2$ であるから、 $0 < u < 1$ で増加し、 $u > 1$ で減少する。最大値は

$$\phi(1) = -1$$

である。また $u \rightarrow 0^+$ と $u \rightarrow \infty$ のどちらでも $\phi(u) \rightarrow -\infty$ である。よって正の解は、 $\log a < -1$ のとき 2 個、 $\log a = -1$ のとき 1 個、 $\log a > -1$ のとき 0 個である。

以上より、共通接線の本数は

$$\begin{cases} 3 & (0 < a < e^{-1}), \\ 2 & (a = e^{-1}), \\ 1 & (a > e^{-1}) \end{cases}$$

である。

▶ 別解（接点 1 つと判別式で定数分離）

【方針】

C_1 上の接点だけを t とおき、その接線と放物線 C_2 の交点方程式が重解をもつ条件を使う。これにより $a = F(t)$ と定数分離し、 F の増減から本数を数える。

【解答】

C_1 上の $x = t$ ($t > 0$) における接線は

$$y = (\log t + 1)x - t$$

である。この直線と $C_2 : y = ax^2$ の交点は

$$ax^2 - (\log t + 1)x + t = 0$$

をみたす。両者が接するための必要十分条件は、この二次方程式の判別式が 0 となることである。よって

$$(\log t + 1)^2 - 4at = 0,$$

すなわち

$$a = F(t) := \frac{(\log t + 1)^2}{4t} \quad (t > 0). \quad (1)$$

1 つの t から接線は一意に定まるため、共通接線の本数は (1) の正の解の個数に等しい。

微分すると

$$F'(t) = \frac{(\log t + 1)(1 - \log t)}{4t^2}.$$

また

$$F(e^{-1}) = 0, \quad F(e) = \frac{1}{e},$$

であり、端での様子は

$$\lim_{t \rightarrow +0} F(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$$

である。後者は問題文で与えられた極限から従う。以上より F は

$$\begin{array}{c|cccc} t & (0, e^{-1}) & e^{-1} & (e^{-1}, e) & (e, \infty) \\ \hline F & +\infty \searrow 0 & 0 & 0 \nearrow e^{-1} & e^{-1} \searrow 0 \end{array}$$

と変化する。

したがって、水平線 $y = a$ ($a > 0$) との交点数は、

$$\begin{cases} 3 & (0 < a < e^{-1}), \\ 2 & (a = e^{-1}), \\ 1 & (a > e^{-1}) \end{cases}$$

である。ゆえに共通接線の本数も同じく

$$\begin{cases} 3 & (0 < a < e^{-1}), \\ 2 & (a = e^{-1}), \\ 1 & (a > e^{-1}) \end{cases}$$

となる。

【総評】 難度 7, 計算量 6. 想定時間は 25 分程度。接点を 2 つ置いて傾きと切片を一致させ、未知数を $u = as$ にまとめる発想が山場である。 $u < 0$ に常に 1 解あることを忘れやすく, $u > 0$ の最大値 -1 と $\log a$ の比較で本数を分類する必要がある。

【第 5 問】

xy 平面上に楕円 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ がある。次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(a, b)$ を通る C の接線が 2 本あり, それらが直交するとき, a, b がみたす条件を求めよ。
- (2) C に外接する長方形のうち, x 座標が 1 で y 座標が正である頂点をもつものの面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) 点 $P(a, b)$ を通る傾き m の直線を楕円に接する条件に代入し, 接線の傾きが満たす二次方程式を作る。2 本の接線が直交する条件は傾きの積が -1 である。(2) は (1) から指定された頂点を $(1, 2)$ と決め, その点を通る 2 接線の傾きから, 向かい合う平行接線間の距離を掛けて面積を求める。

【解答】

(1) 点 $P(a, b)$ を通る傾き m の直線を

$$y - b = m(x - a)$$

とする。これを $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に代入して, 接する条件を判別式 0 で表すと

$$(a^2 - 4)m^2 - 2abm + (b^2 - 1) = 0$$

を得る。2 本の接線がともに縦でないとき, その傾きを m_1, m_2 とすると, 直交条件は $m_1 m_2 = -1$ である。したがって

$$\frac{b^2 - 1}{a^2 - 4} = -1$$

より

$$a^2 + b^2 = 5$$

である。縦の接線を含む場合は $x = \pm 2$ と水平な接線 $y = \pm 1$ の組になり, この場合も $a^2 + b^2 = 5$ をみたす。逆に $a^2 + b^2 = 5$ なら点 P は楕円の外部にあり, 直交する 2 本の接線をもつ。よって条件は

$$a^2 + b^2 = 5$$

である。

(2) 指定された頂点を $(1, \beta)$ ($\beta > 0$) とすると, (1) より

$$1 + \beta^2 = 5$$

だから $\beta = 2$ である。すなわち頂点は $(1, 2)$ である。この点を通る 2 本の接線の傾きは, (1) の式に $a = 1, b = 2$ を代入して

$$3m^2 + 4m - 3 = 0$$

の 2 根 m_1, m_2 である。これらは $m_1 m_2 = -1$ をみたす。

傾き m の楕円の接線は $y = mx \pm \sqrt{4m^2 + 1}$ と表されるので, この 2 本の平行接線間の距離は

$$\frac{2\sqrt{4m^2 + 1}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

である。したがって長方形の面積は

$$\frac{2\sqrt{4m_1^2+1}}{\sqrt{m_1^2+1}} \cdot \frac{2\sqrt{4m_2^2+1}}{\sqrt{m_2^2+1}}$$

である。 $r = m_1^2$ とおくと $m_2^2 = 1/r$ であり, $m_1 + m_2 = -\frac{4}{3}$, $m_1 m_2 = -1$ より

$$r + \frac{1}{r} = \frac{34}{9}$$

である。よって面積は

$$4\sqrt{\frac{(4r+1)(r+4)}{(r+1)^2}} = 4\sqrt{\frac{4\left(r+\frac{1}{r}\right)+17}{r+\frac{1}{r}+2}} = 4\sqrt{\frac{289}{52}} = \frac{34\sqrt{13}}{13}$$

である。

▶ 別解（楕円の支持関数と直交座標）

【方針】

(1) 接線を法線ベクトルで表し, 直交する 2 法線を正規直交方向に分解して交点の距離を求める。(2) 楕円を各方向からはさんだ幅, すなわち支持関数を使って外接長方形の面積を求める。

【解答】

(1) 直線

$$lx + my = 1$$

が楕円 C に接するための条件は

$$4l^2 + m^2 = 1 \quad (1)$$

である。実際, 楕円上の点 $(2\cos\theta, \sin\theta)$ における接線をこの形に直せば確認できる。

点 P で交わる直交 2 接線の法線ベクトルを

$$\mathbf{n}_1 = \rho(\cos\theta, \sin\theta), \quad \mathbf{n}_2 = \sigma(-\sin\theta, \cos\theta)$$

とする。両接線は $\mathbf{n}_i \cdot P = 1$ と書けるので, 直交分解により

$$P = \frac{\mathbf{n}_1}{\rho^2} + \frac{\mathbf{n}_2}{\sigma^2}.$$

したがって

$$|P|^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\sigma^2}. \quad (2)$$

一方, 接線条件 (1) から

$$\frac{1}{\rho^2} = 4\cos^2\theta + \sin^2\theta, \quad \frac{1}{\sigma^2} = 4\sin^2\theta + \cos^2\theta.$$

これらを (2) に代入すると

$$a^2 + b^2 = |P|^2 = 5.$$

逆にこの円上の点は楕円の外部にあり, 同じ計算を逆にたどって直交する 2 接線をもつ。よって条件は

$$a^2 + b^2 = 5.$$

(2) 指定された頂点は (1) より $P = (1, 2)$ である。外接長方形の一組の辺に垂直な単位ベクトルを

$$\mathbf{u} = (c, s) = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \mathbf{v} = (-s, c)$$

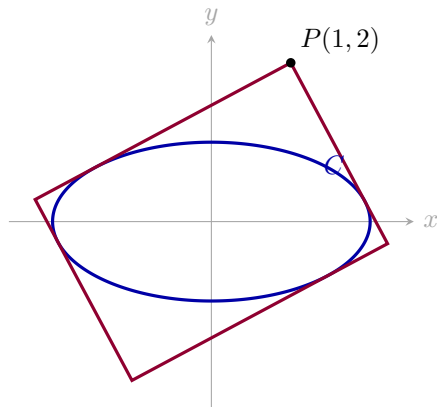
とする。楕円の原点から各支持線までの距離は

$$h = \sqrt{4c^2 + s^2} = \sqrt{1 + 3c^2}, \quad k = \sqrt{4s^2 + c^2} = \sqrt{1 + 3s^2}.$$

したがって長方形の頂点を

$$P = h\mathbf{u} + k\mathbf{v} = (1, 2)$$

と選べる。



$P \cdot \mathbf{u} = h, P \cdot \mathbf{v} = k$ より

$$c + 2s = h, \quad -s + 2c = k.$$

第 1 式を 2 乗して $h^2 = 1 + 3c^2$ を用いると

$$3(s^2 - c^2) + 4cs = 0, \quad c^2 - s^2 = \frac{4}{3}cs. \quad (3)$$

さらに

$$(c^2 - s^2)^2 + 4c^2s^2 = 1$$

へ (3) を代入し, $h, k > 0$ となる符号を選ぶと

$$cs = \frac{3}{2\sqrt{13}}.$$

よって

$$\begin{aligned} hk &= (c + 2s)(-s + 2c) \\ &= 2(c^2 - s^2) + 3cs \\ &= \frac{17}{3}cs = \frac{17}{2\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

長方形の 2 辺の長さは $2h, 2k$ だから, 面積は

$$4hk = \frac{34}{\sqrt{13}} = \frac{34\sqrt{13}}{13}.$$

【総評】 難度 7, 計算量 6. 想定時間は 25 分程度。第 (1) 問は傾きを未知数にした接線条件, 第 (2) 問は平行接線間の距離を使う構成力が問われる。縦の接線を含む例外処理と, 面積計算で傾きそのものを最後まで解かずに対称式で整理することが重要である。