

入 学 試 験 問 題

数 学



横 浜 国 立 大 学 2017 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = (3 - x)e^x$ について、関数の増減、極値、グラフの凹凸を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ は証明なしで用いてよい。

第 1 問

次の問いに答えよ。

(2) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$$

を求めよ。

第 3 問

円卓に A, B, C, D, E, F の 6 人が右の図のように座っており、さいころが 1 個ある。

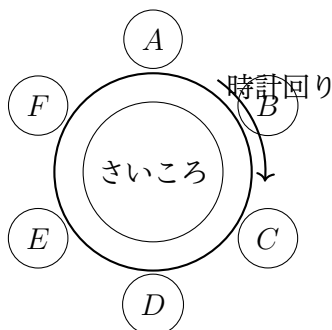
このとき、次の試行 (*) を繰り返し、得点を獲得していくゲームを考える。ただし、ゲーム開始時は、 A がさいころを持っており、各自の持ち点は 0 点であるとする。

(*) さいころを持っている人が、そのさいころを 1 回投げて出た目を k とする。このとき、投げた人から時計回りに k 人目の人がさいころを受け取り、さいころを受け取った人の持ち点に k 点が加算される。

たとえば、 A がさいころを投げて 5 の目が出た場合は、 F がさいころを受け取り、 F の持ち点に 5 点が加算される。

試行 (*) を 4 回繰り返してゲームを終了する。次の問いに答えよ。

- (1) ゲーム終了時に A の持ち点が 0 点である確率を求めよ。
- (2) ゲーム終了時に A の持ち点が 5 点である確率を求めよ。
- (3) ゲーム終了時に A の持ち点が 5 点であるとき、 E の持ち点が 3 点である条件付き確率を求めよ。



第 3 問

空間に 2 つの定点 O, A があり、 $|\overrightarrow{OA}| = 2$ をみたしている。また、2 点 P, Q は次の条件をみたしながら動く。

$$|\overrightarrow{OP}| \leq 5, \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$$

$$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{5}, \quad \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} = -2$$

ただし、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}$ は $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OA}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

- (1) $|\overrightarrow{OP}|$ の最小値を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{PQ}|$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) 線分 PQ が通過してできる部分の体積を求めよ。

第 4 問

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は以下の条件をみたす。

- (i) $a_1 = 1, \quad a_n \neq 0 \ (n = 2, 3, 4, \dots)$
- (ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 b_n は $\frac{1}{a_n}$ より大きい最小の自然数である。
- (iii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{b_n}$ が成り立つ。

次の問いに答えよ。

- (1) b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ。
- (2) $b_1 b_2 \cdots b_n a_{n+1} \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k}$ を求めよ。

第 5 問

正の実数 a, b に対して、連立不等式

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq x^2, \\ a^2x^2 - (y - b)^2 \geq 0 \end{cases}$$

が表す xy 平面上の領域の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a, b の式で表せ。

(2) a, b が

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4b^2}{9} = 1 \quad (a, b > 0)$$

をみたしながら動くとき、 S の最大値およびそのときの a, b の値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)