

横浜国立大学 2017 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = (3-x)e^x$ について、関数の増減、極値、グラフの凹凸を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ は証明なしで用いてよい。

▶ 解法 1

【方針】

$f'(x)$ と $f''(x)$ を計算して、増減、極値、凹凸を調べる。さらに切片、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow \infty$ の様子を確認してグラフの概形をまとめる。

【解答】

(1)

$$f'(x) = (2-x)e^x, \quad f''(x) = (1-x)e^x$$

である。 $e^x > 0$ より、 $f'(x) > 0$ は $x < 2$ 、 $f'(x) < 0$ は $x > 2$ である。したがって $f(x)$ は $x < 2$ で増加し、 $x > 2$ で減少する。また $x = 2$ で極大値

$$f(2) = e^2$$

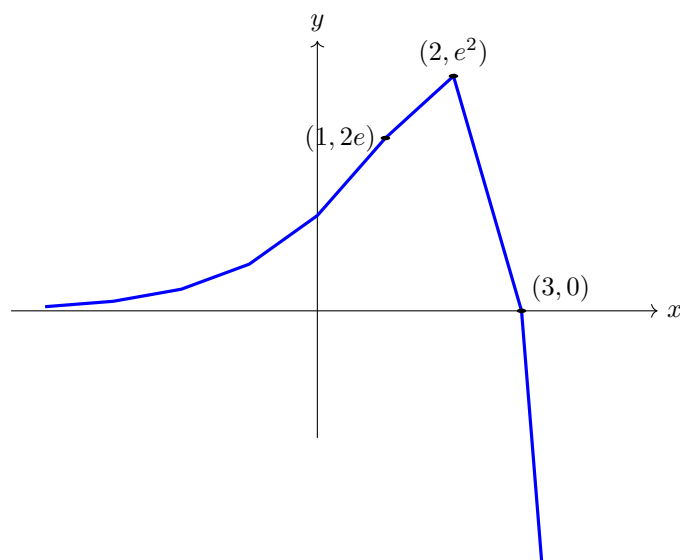
をとる。

次に $f''(x) > 0$ は $x < 1$ 、 $f''(x) < 0$ は $x > 1$ である。したがって $x < 1$ で下に凸、 $x > 1$ で上に凸であり、 $x = 1$ で変曲点

$$(1, 2e)$$

をもつ。

また $f(0) = 3$ 、 $f(3) = 0$ である。 $x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x) \rightarrow 0$ で、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x) \rightarrow -\infty$ である。以上を用いて、左側では x 軸に近づき、 $(1, 2e)$ で凹凸を変え、 $(2, e^2)$ で極大となり、 $(3, 0)$ を通って右下へ下がるグラフとなる。



▶ 解法 2

【方針】

指数関数が常に正であることを利用し、 f' と f'' の符号を一次因子だけで読む。切片と両端の極限を合わせて増減・凹凸表から作図する。

【解答】

(1)

$$f'(x) = (2-x)e^x, \quad f''(x) = (1-x)e^x.$$

$e^x > 0$ なので $x < 2$ で増加, $x > 2$ で減少し,

$$(2, e^2)$$

が極大点である。また $x < 1$ で $f'' > 0$, $x > 1$ で $f'' < 0$ だから

$$(1, 2e)$$

が変曲点である。

さらに $f(0) = 3$, $f(3) = 0$ で,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

したがって左では x 軸の上側から 0 へ近づき, 変曲点を通して極大となり, その後 $(3, 0)$ を通って右下へ進む。

【総評】 難度 4、計算量 4。想定時間は 10 分程度。導関数と第 2 導関数の符号を正しく読めばよい標準問題である。概形では極大点、変曲点、切片、左右の極限の 4 点を過不足なく反映させる必要がある。

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(2) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

半角の置換 $u = \tan(x/2)$ を用いる。 $\sin x = 2u/(1+u^2)$, $\cos x = (1-u^2)/(1+u^2)$, $dx = 2du/(1+u^2)$ により有理関数の積分に直し、部分分数分解する。

【解答】

(2)

$$u = \tan \frac{x}{2}$$

とおくと、 $x = 0$ で $u = 0$ 、 $x = \pi/2$ で $u = 1$ である。また

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

である。したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x} = \int_0^1 \frac{du}{(2-u)(2u+1)}$$

となる。

ここで

$$\frac{1}{(2-u)(2u+1)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2-u} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2u+1}$$

である。よって

$$\int_0^1 \frac{du}{(2-u)(2u+1)} = \frac{1}{5} [-\log(2-u) + \log(2u+1)]_0^1$$

であるから

$$\frac{1}{5} \log 6$$

を得る。

▶ 解法 2

【方針】

$3 \sin x + 4 \cos x$ を位相のずれた余弦 $5 \cos(x - \alpha)$ に合成し、正割関数の原始関数で積分する。

【解答】

(2) $\cos \alpha = 4/5$, $\sin \alpha = 3/5$ となる $0 < \alpha < \pi/2$ を取ると

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5 \cos(x - \alpha).$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x} &= \frac{1}{5} \int_{-\alpha}^{\pi/2-\alpha} \frac{du}{\cos u} \\ &= \frac{1}{5} \left[\log \frac{1 + \sin u}{\cos u} \right]_{-\alpha}^{\pi/2-\alpha}. \end{aligned}$$

上端では

$$\frac{1 + \sin(\pi/2 - \alpha)}{\cos(\pi/2 - \alpha)} = \frac{1 + 4/5}{3/5} = 3,$$

下端では

$$\frac{1 + \sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{1 - 3/5}{4/5} = \frac{1}{2}.$$

よって積分値は

$$\frac{1}{5} \log \frac{3}{1/2} = \frac{1}{5} \log 6.$$

【総評】 難度 5、計算量 5。想定時間は 12 分程度。半角置換後に分母が $(2 - u)(2u + 1)$ と因数分解できるため、あとは部分分数分解で処理できる。積分範囲 $u : 0 \rightarrow 1$ と対数の符号を誤らないことが重要である。

【第 3 問】

円卓に A, B, C, D, E, F の 6 人が右の図のように座っており、さいころが 1 個ある。

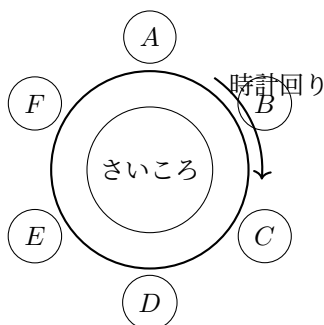
このとき、次の試行 (*) を繰り返し、得点を獲得していくゲームを考える。ただし、ゲーム開始時は、 A がさいころを持っており、各自の持ち点は 0 点であるとする。

(*) さいころを持っている人が、そのさいころを 1 回投げて出た目を k とする。このとき、投げた人から時計回りに k 人目の人がさいころを受け取り、さいころを受け取った人の持ち点に k 点が加算される。

たとえば、 A がさいころを投げて 5 の目が出た場合は、 F がさいころを受け取り、 F の持ち点に 5 点が加算される。

試行 (*) を 4 回繰り返してゲームを終了する。次の問いに答えよ。

- (1) ゲーム終了時に A の持ち点が 0 点である確率を求めよ。
- (2) ゲーム終了時に A の持ち点が 5 点である確率を求めよ。
- (3) ゲーム終了時に A の持ち点が 5 点であるとき、 E の持ち点が 3 点である条件付き確率を求めよ。



▶ 解法 1

【方針】

A, B, C, D, E, F をそれぞれ余り $0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対応させる。4 回の出目を k_1, k_2, k_3, k_4 とし、累積和 $S_j = k_1 + \cdots + k_j$ の 6 で割った余りで受け取る人を判定する。 $S_j \equiv 0$ のとき A 、 $S_j \equiv 4$ のとき E が得点するので、累積和で数え上げる。

【解答】

(1) A, B, C, D, E, F を順に $0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対応させる。4 回の出目を k_1, k_2, k_3, k_4 とし、 $S_j = k_1 + \cdots + k_j$ とする。このとき $S_j \equiv 0 \pmod{6}$ となる回に A が得点する。

A の持ち点が 0 点であるためには、4 回すべてで $S_j \not\equiv 0 \pmod{6}$ であればよい。各回、現在の余りが 0 でないようにする出目は 5 通りであるから、有利な出目列は

$$5^4 = 625$$

通りである。全体は 6^4 通りなので、求める確率は

$$\frac{625}{1296}$$

である。

(2) A の得点が 5 点になる場合を数える。 A が 1 回だけ得点し、その得点が 5 点である場合を考える。得点する回は第 2 回、第 3 回、第 4 回のいずれかであり、それぞれ 25 通りである。したがってこの場合は

$$75$$

通りである。

次に A が 2 回得点する場合、2 回の得点の和が 5 でなければならない。得点回は第 2 回と第 4 回に限られ、得点の組は

$$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$$

の 4 通りである。3 回以上得点して合計 5 点になることはない。よって有利な出目列は

$$75 + 4 = 79$$

通りである。したがって求める確率は

$$\frac{79}{1296}$$

である。

(3) (2) で数えた 79 通りのうち、 E が 3 点を得るには、ある回で出目が 3 で、かつその回の累積和が 4 に合同でなければならない。

(2) の分類に従って確認すると、この条件をみたす出目列は

$$(1, 5, 1, 3), \quad (1, 3, 3, 5)$$

の 2 通りである。したがって条件付き確率は

$$\frac{2}{79}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

累積位置と A・E の得点を状態にした動的計画法で 4 回の遷移を数える。各出目 1~6 を状態へ加え、最終状態の個数を集計する。

【解答】

人を時計回りに $A = 0, B = 1, \dots, F = 5$ と番号づける。 j 回後の位置, A の得点, E の得点を (r, p, q) とし, その出目列の個数を $N_j(r, p, q)$ とする。初期値は

$$N_0(0, 0, 0) = 1.$$

出目 $k = 1, \dots, 6$ に対し

$$r' \equiv r + k \pmod{6}$$

とし, $r' = 0$ なら p に k , $r' = 4$ なら q に k を加える。この遷移を 4 回行う。

(1) $p = 0$ の状態の個数を合計すると

$$625$$

通りである。全体は $6^4 = 1296$ 通りなので

$$\frac{625}{1296}.$$

(2) $p = 5$ の状態の個数を合計すると

$$79$$

通りである。したがって

$$\frac{79}{1296}.$$

(3) $p = 5, q = 3$ となるのは

$$(1, 5, 1, 3), \quad (1, 3, 3, 5)$$

の 2 列である。条件付き確率は

$$\frac{2}{79}.$$

【総評】 難度 6、計算量 7。想定時間は 22 分程度。4 回だけなので全出目列を累積和の余りで整理するのが確実である。(2) では A が 1 回だけ 5 点を得る場合と、2 回で合計 5 点を得る場合を分けると数え落としを防げる。(3) は (2) の分類内で E の得点条件を重ねる。

【第 3 問】

空間に 2 つの定点 O, A があり、 $|\vec{OA}| = 2$ をみたしている。また、2 点 P, Q は次の条件をみたしながら動く。

$$\begin{aligned} |\vec{OP}| &\leq 5, & \vec{OP} \cdot \vec{OA} &= 6 \\ |\vec{OQ}| &= \sqrt{5}, & \vec{OQ} \cdot \vec{OA} &= -2 \end{aligned}$$

ただし、 $\vec{OP} \cdot \vec{OA}$ は $\vec{OP}$ と $\vec{OA}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

- (1) $|\vec{OP}|$ の最小値を求めよ。
- (2) $|\vec{PQ}|$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) 線分 PQ が通過してできる部分の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$\vec{OA}$ 方向を x 軸にとり、 $A = (2, 0, 0)$ とする。すると P は平面 $x = 3$ 上の半径 4 の円板、 Q は平面 $x = -1$ 上の半径 2 の円周を動く。(3) は x 座標ごとの断面を考え、円周と円板を同じ比で結ぶことでできる円環または円板の面積を積分する。

【解答】

(1) $\vec{OA}$ の方向を x 軸にとり、 $O = (0, 0, 0)$ 、 $A = (2, 0, 0)$ とする。 $P = (x, y, z)$ とすると

$$\vec{OP} \cdot \vec{OA} = 2x = 6$$

より $x = 3$ である。また $|\vec{OP}| \leq 5$ より

$$y^2 + z^2 \leq 16$$

である。したがって $|\vec{OP}|$ の最小値は $y = z = 0$ のときで

$$3$$

である。

(2) 同様に $Q = (x, y, z)$ とすると

$$2x = -2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

より、 Q は平面 $x = -1$ 上の円

$$y^2 + z^2 = 4$$

を動く。

P の yz 平面成分は半径 4 以下、 Q の yz 平面成分は半径 2 である。したがってその差の長さは 0 以上 6 以下のすべての値をとる。 x 座標の差は常に 4 であるから

$$|PQ|^2 = 16 + d^2 \quad (0 \leq d \leq 6)$$

である。よって

$$4 \leq |PQ| \leq 2\sqrt{13}$$

である。

(3) 線分 PQ 上の点で、 Q から P へ向かう比を $s : 1 - s$ ($0 \leq s \leq 1$) とする。この点の x 座標は

$$-1 + 4s$$

である。

この断面で、 Q 由来の yz 成分は半径 $2(1 - s)$ の円周上、 P 由来の成分は半径 $4s$ 以下の円板内を動く。したがって断面は、 $0 \leq s < 1/3$ では外半径 $2 + 2s$ 、内半径 $2 - 6s$ の円環、 $1/3 \leq s \leq 1$ では半径 $2 + 2s$ の円板である。

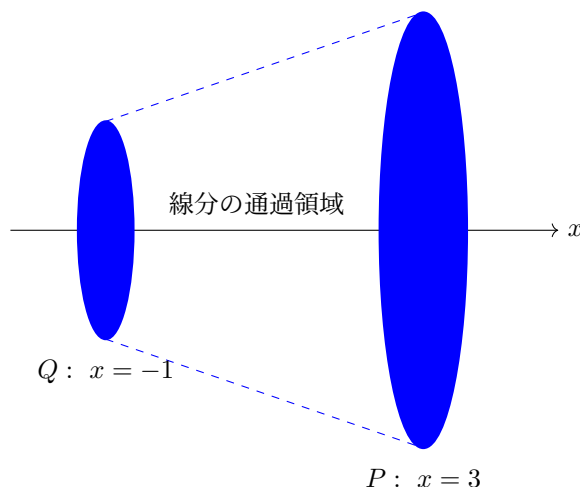
よって断面積は

$$\begin{cases} \pi\{(2 + 2s)^2 - (2 - 6s)^2\} = 32\pi s(1 - s) & (0 \leq s < 1/3), \\ \pi(2 + 2s)^2 = 4\pi(1 + s)^2 & (1/3 \leq s \leq 1) \end{cases}$$

である。 $dx = 4ds$ だから、求める体積は

$$4 \int_0^{1/3} 32\pi s(1-s) ds + 4 \int_{1/3}^1 4\pi(1+s)^2 ds = \frac{320\pi}{9}$$

である。



▶ 解法 2

【方針】

$\vec{OA}$ 方向と垂直方向へ直交分解する。線分の各断面は、半径 2 の円周と半径 4 の円板の重み付き和であり、半径の取り得る区間から円環・円板を判定する。

【解答】

$\vec{OA}$ 方向を x 軸とすると

$$P = (3, \mathbf{p}), \quad |\mathbf{p}| \leq 4, \quad Q = (-1, \mathbf{q}), \quad |\mathbf{q}| = 2.$$

(1)

$$|OP|^2 = 9 + |\mathbf{p}|^2$$

より最小値は 3 である。

(2)

$$|PQ|^2 = 16 + |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2.$$

円板内の $\mathbf{p}$ と半径 2 の円周上の $\mathbf{q}$ の差の長さは 0 から 6 までを連続に動く。よって

$$4 \leq |PQ| \leq 2\sqrt{13}.$$

(3) Q から P へ比 $s : 1-s$ の点を取ると、 $x = -1 + 4s$ で、垂直成分は

$$(1-s)\mathbf{q} + s\mathbf{p}.$$

その半径は

$$\max\{0, 2(1-s) - 4s\} \leq r \leq 2(1-s) + 4s.$$

したがって $s < 1/3$ では内半径 $2 - 6s$ 、外半径 $2 + 2s$ の円環、 $s \geq 1/3$ では半径 $2 + 2s$ の円板となる。 $dx = 4ds$ より

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{1/3} \pi\{(2+2s)^2 - (2-6s)^2\} ds \\ &\quad + 4 \int_{1/3}^1 \pi(2+2s)^2 ds = \frac{320\pi}{9}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 7。想定時間は 25 分程度。座標設定で P が円板、 Q が円周を動くことを読み取るのが出発点である。(3) は断面が途中まで円環、途中から円板に変わるため、 $s = 1/3$ で積分を分ける判断が重要になる。

【第 4 問】

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は以下の条件をみたす。

(i) $a_1 = 1, \quad a_n \neq 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$

(ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 b_n は $\frac{1}{a_n}$ より大きい最小の自然数である。

(iii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{b_n}$ が成り立つ。

次の問いに答えよ。

(1) b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ。

(2) $b_1 b_2 \cdots b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

初めの数項を計算して $a_{n+1} = 1/(b_1 b_2 \cdots b_n)$ という形を予想する。帰納法でこれを示すと、 $b_n = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} + 1$ も従い、(2) と (3) はすぐに求まる。

【解答】

(1) $a_1 = 1$ であるから、 $1/a_1 = 1$ より

$$b_1 = 2$$

である。したがって

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である。次に $1/a_2 = 2$ より $b_2 = 3$ であり、

$$a_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

である。さらに $1/a_3 = 6$ より

$$b_3 = 7$$

である。

(2) 数学的帰納法で

$$a_{n+1} = \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_n}$$

を示す。 $n = 1$ では $a_2 = 1/2 = 1/b_1$ で成り立つ。

$a_n = 1/(b_1 b_2 \cdots b_{n-1})$ とする。このとき

$$\frac{1}{a_n} = b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$$

であるから、 b_n はこれより大きい最小の自然数、すなわち

$$b_n = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} + 1$$

である。よって

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_1 \cdots b_{n-1}} - \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_n}$$

である。したがってすべての n で成り立つ。

よって

$$b_1 b_2 \cdots b_n a_{n+1} = 1$$

である。

(3) 漸化式 $a_{n+1} = a_n - 1/b_n$ より

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = a_1 - a_{n+1} = 1 - a_{n+1}$$

である。(2) より $a_{n+1} = 1/(b_1 b_2 \cdots b_n)$ であり、分母は限りなく大きくなるから $a_{n+1} \rightarrow 0$ である。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = 1$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

$1/a_n$ が整数であることを保つ不変量を先に示す。 $c_n = 1/a_n$ とおけば $b_n = c_n + 1$, $c_{n+1} = c_n(c_n + 1)$ となり、積と和が直接求まる。

【解答】

(1) $c_n = 1/a_n$ とおく。 $c_1 = 1$ なので

$$b_1 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = 3, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = 7.$$

(2) c_n が自然数なら、 b_n は c_n より大きい最小の自然数だから

$$b_n = c_n + 1.$$

また

$$a_{n+1} = \frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_n + 1} = \frac{1}{c_n(c_n + 1)}$$

より

$$c_{n+1} = c_n b_n.$$

$c_1 = 1$ なので繰り返すと

$$c_{n+1} = b_1 b_2 \cdots b_n.$$

したがって

$$b_1 b_2 \cdots b_n a_{n+1} = 1.$$

(3) 漸化式を足すと

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = a_1 - a_{n+1} = 1 - \frac{1}{c_{n+1}}.$$

c_{n+1} は少なくとも毎回 2 倍になるので無限大へ発散する。ゆえに極限は

$$1.$$

【総評】 難度 5、計算量 5。想定時間は 15 分程度。初期計算から積の逆数という構造を見抜くと、帰納法で一気に整理できる。 b_n が「より大きい最小の自然数」であるため、 $1/a_n$ が整数になることを示してから $b_n = 1/a_n + 1$ とするのが大切である。

【第 5 問】

正の実数 a, b に対して、連立不等式

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq x^2, \\ a^2 x^2 - (y - b)^2 \geq 0 \end{cases}$$

が表す xy 平面上の領域の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a, b の式で表せ。

(2) a, b が

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4b^2}{9} = 1 \quad (a, b > 0)$$

をみたしながら動くとき、 S の最大値およびそのときの a, b の値を求めよ。

▶ 解法 1
【方針】

不等式 $a^2 x^2 - (y - b)^2 \geq 0$ を $b - ax \leq y \leq b + ax$ と直す。下側が直線 $b - ax$ になる部分と放物線 $y = x^2$ になる部分に分けて面積を積分し、 $S = ab + a^3/6$ を得る。(2) は楕円条件を $a = 2 \cos \theta, b = 3 \sin \theta/2$ とおいて 1 変数で最大化する。

【解答】

(1) $a > 0, x \geq 0$ であるから

$$a^2 x^2 - (y - b)^2 \geq 0$$

は

$$b - ax \leq y \leq b + ax$$

と同値である。放物線 $y = x^2$ と直線 $y = b - ax, y = b + ax$ との正の交点の x 座標をそれぞれ s, r とすると

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2}, \quad r = \frac{\sqrt{a^2 + 4b} + a}{2}$$

である。このとき $r - s = a, rs = b$ である。

$0 \leq x \leq s$ では上下の境界は 2 直線であり、 $s \leq x \leq r$ では上が $b + ax$ 、下が x^2 である。よって

$$S = \int_0^s 2ax \, dx + \int_s^r (b + ax - x^2) \, dx$$

である。第 1 項は as^2 である。第 2 項は $x = s + u$ とおくと

$$\int_0^a (a - u)(2s + u) \, du = a^2 s + \frac{a^3}{6}$$

である。したがって

$$S = as^2 + a^2 s + \frac{a^3}{6} = as(s + a) + \frac{a^3}{6} = ab + \frac{a^3}{6}$$

である。

(2) 条件より

$$a = 2 \cos \theta, \quad b = \frac{3}{2} \sin \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおける。このとき

$$S = ab + \frac{a^3}{6} = 3 \sin \theta \cos \theta + \frac{4}{3} \cos^3 \theta$$

である。

$u = \sin \theta$ とおくと $0 < u < 1, \cos \theta > 0$ である。 S を θ で微分すると

$$\frac{dS}{d\theta} = 3(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 4 \cos^2 \theta \sin \theta$$

である。 $u = \sin \theta$ を用いて $dS/d\theta = 0$ を整理すると

$$4u^3 - 6u^2 - 4u + 3 = 0$$

すなわち

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)(4u^2 - 4u - 6) = 0$$

である。 $0 < u < 1$ より $u = 1/2$ である。

このとき

$$\sin \theta = \frac{1}{2}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

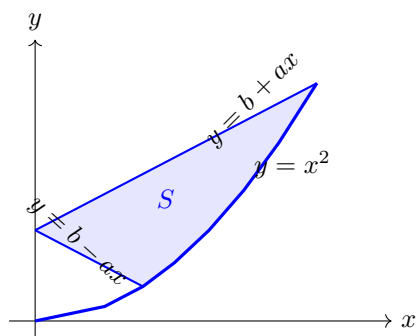
なので

$$a = \sqrt{3}, \quad b = \frac{3}{4}$$

である。端に近づく場合の値よりこれが最大であり、最大値は

$$S = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{(\sqrt{3})^3}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

である。



▶ 解法 2

【方針】

(1) は縦線による断面積を交点の和積で整理する。(2) は制約曲線上の内部極値をラグランジュの未定乗数法で求め、端の極限とも比較する。

【解答】

(1) 正の交点を

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2}, \quad r = \frac{\sqrt{a^2 + 4b} + a}{2}$$

とすると $r - s = a$, $rs = b$ である。縦断面を積分して

$$S = \int_0^s 2ax \, dx + \int_s^r (b + ax - x^2) \, dx = ab + \frac{a^3}{6}.$$

(2) 制約を

$$G(a, b) = \frac{a^2}{4} + \frac{4b^2}{9} = 1$$

とする。内部極値では

$$b + \frac{a^2}{2} = \lambda \frac{a}{2}, \quad a = \lambda \frac{8b}{9}.$$

λ を消去し、制約も用いると

$$32b^3 - 72b^2 - 72b + 81 = 0,$$

すなわち

$$(4b - 3)(8b^2 - 12b - 27) = 0.$$

$0 < b < 3/2$ にある解は $b = 3/4$ だけで、制約から

$$a = \sqrt{3}.$$

端へ近づくと $a \rightarrow 0$ では $S \rightarrow 0$, $a \rightarrow 2, b \rightarrow 0$ では $S \rightarrow 4/3$ である。一方この内部点では

$$S = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{(\sqrt{3})^3}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{4} > \frac{4}{3}.$$

したがって最大値は $5\sqrt{3}/4$, そのとき

$$(a, b) = \left(\sqrt{3}, \frac{3}{4} \right).$$

【総評】 難度 7、計算量 7。想定時間は 25 分程度。(1) は領域の下端が直線から放物線に切り替わる点を正しく捉える必要がある。 $r - s = a$ 、 $rs = b$ を使うと面積が $ab + a^3/6$ まで簡潔に整理できる。(2) は楕円の媒介変数表示後、端点でなく内部の臨界点が最大になることを確認する。