

横浜国立大学 2019 年度 文系

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

赤色、白色、黄色の 3 つのさいころを同時に投げ、それぞれのさいころの出た目を x, y, z とする。 x と y の最小値を m ，最大値を M とする。次の問いに答えよ。

(1) $m \leq z \leq M$ となる確率を求めよ。

(2) $m \leq z \leq M$ という条件の下で、 $M - m = 3$ となる条件付き確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(x, y) を固定すると、 z の許される個数は $|x - y| + 1$ 個である。これをすべての順序付きの (x, y) について数える。(2) は $|x - y| = 3$ の順序付きの組だけを数え、(1) の事象の個数で割る。

【解答】

(1) (x, y) を固定すると、 $m \leq z \leq M$ をみたす z の個数は

$$M - m + 1 = |x - y| + 1$$

である。したがって有利な出方の総数は

$$\sum_{x=1}^6 \sum_{y=1}^6 (|x - y| + 1)$$

である。ここで

$$\sum_{x=1}^6 \sum_{y=1}^6 |x - y| = 2\{1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1\} = 70$$

だから、有利な出方は $70 + 36 = 106$ 通りである。全事象は $6^3 = 216$ 通りなので、求める確率は

$$\frac{106}{216} = \frac{53}{108}$$

である。

(2) $M - m = 3$ は $|x - y| = 3$ と同値である。このような順序付きの (x, y) は

$$2(6 - 3) = 6$$

通りあり、各場合で z は 4 通りである。したがって、 $m \leq z \leq M$ かつ $M - m = 3$ となる出方は $6 \cdot 4 = 24$ 通りである。

よって条件付き確率は

$$\frac{24}{106} = \frac{12}{53}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

差 $d = |x - y|$ ごとに、順序つき組 (x, y) の個数と許される z の個数を表にする。条件付き確率の分子は、その表の $d = 3$ の行だけを取り出せばよい。

【解答】

(1) $d = |x - y|$ とおく。 $d = 0$ のとき順序つき組 (x, y) は 6 通り、 $1 \leq d \leq 5$ のときは $2(6 - d)$ 通りである。また、各組に対して z は $d + 1$ 通り選べる。

d	0	1	2	3	4	5
$\#(x, y)$	6	10	8	6	4	2
$\#z$	1	2	3	4	5	6
積	6	20	24	24	20	12

よって条件をみたす出方は

$$6 + 20 + 24 + 24 + 20 + 12 = 106$$

通りである。したがって

$$\frac{106}{6^3} = \frac{53}{108}$$

となる。

(2) 条件 $M - m = 3$ は $d = 3$ である。表より、もとの条件も同時にみたす出方は 24 通りだから、求める条件付き確率は

$$\frac{24}{106} = \frac{12}{53}$$

である。分母は全 216 通りではなく、条件 $m \leq z \leq M$ をみたす 106 通りであることに注意する。

【総評】 難度 4, 計算量 4。想定時間は 10 分程度。核心は (x, y) を固定すると、区間 $[m, M]$ に入る整数 z が $M - m + 1 = |x - y| + 1$ 個になることである。二重和でも差ごとの表でも 106 通りを再現できる。条件付き確率では、分母を全事象 216 通りではなく、条件 $m \leq z \leq M$ をみたす 106 通りとする。

【第 2 問】

1 辺の長さが 1 である正四面体 $OABC$ がある。辺 OA 上に点 D 、辺 OB 上に点 E 、辺 OC 上に点 F があり、

$$OD : DA = 1 : 1, \quad OE : EB = 2 : 1, \quad OF : FC = 2 : 3$$

をみたしている。さらに辺 OB と辺 AC の中点をそれぞれ M, N とする。平面 DEF と直線 MN の交点を P とする。ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $|\overrightarrow{MN}|$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{MP}|$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

正四面体なので $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ かつ相互の内積は $1/2$ である。(1) は $\overrightarrow{MN}$ を成分表示して長さを求める。(2) は直線 MN 上の点を媒介変数で表し、平面 DEF の切片型の条件に代入する。(3) は P が MN をどの比で進んだ点かを使う。

【解答】

(1) 正四面体の 1 辺の長さが 1 であるから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

である。 M は辺 OB の中点、 N は辺 AC の中点なので

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

である。したがって

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

であり,

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{1}{4}\{3 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}\} = \frac{1}{2}$$

となる。よって

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。

(2) 直線 MN 上の点を

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{MN} = \frac{t}{2}\vec{a} + \frac{1-t}{2}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}$$

と表す。平面 DEF 上の点 $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ は

$$2\alpha + \frac{3}{2}\beta + \frac{5}{2}\gamma = 1$$

をみたす。ここに $\alpha = \frac{t}{2}, \beta = \frac{1-t}{2}, \gamma = \frac{t}{2}$ を代入すると

$$t + \frac{3(1-t)}{4} + \frac{5t}{4} = 1$$

であるから, $t = \frac{1}{6}$ である。したがって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{12}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} + \frac{1}{12}\vec{c}$$

である。

(3) (2) より $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{MN}$ である。したがって

$$|\overrightarrow{MP}| = \frac{1}{6}|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

である。

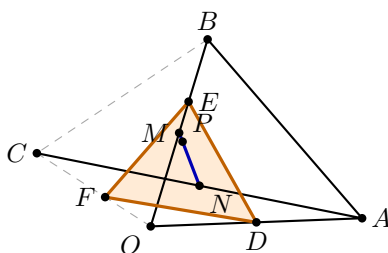
▶ 解法 2

【方針】

直線 MN 上の位置を内分パラメータ s で表し、同じ点を平面 DEF 上のアフィン結合でも表す。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の係数比較だけで s を決定する。

【解答】

点の配置を先に図で整理する。



(1) M, N の位置ベクトルから

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

である。正四面体では異なる 2 辺方向の内積がすべて $1/2$ なので

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{1}{4}(3 + 1 - 1 - 1) = \frac{1}{2}.$$

したがって $|\overrightarrow{MN}| = 1/\sqrt{2}$ である。

(2) P を M から N へ s 進んだ点とすると

$$\overrightarrow{OP} = \frac{s}{2}\vec{a} + \frac{1-s}{2}\vec{b} + \frac{s}{2}\vec{c}. \quad (1)$$

一方、 P は平面 DEF 上にあるから、実数 u, v を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + u\overrightarrow{DE} + v\overrightarrow{DF} = \frac{1-u-v}{2}\vec{a} + \frac{2u}{3}\vec{b} + \frac{2v}{5}\vec{c}. \quad (2)$$

(1),(2) の係数を比べると

$$s = 1 - u - v, \quad u = \frac{3(1-s)}{4}, \quad v = \frac{5s}{4}.$$

後 2 式を初めの式へ代入して

$$s = 1 - \frac{3(1-s)}{4} - \frac{5s}{4} = \frac{1}{4} - \frac{s}{2}$$

より $s = 1/6$ である。よって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{12}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} + \frac{1}{12}\vec{c}.$$

(3) $MP : MN = s : 1 = 1 : 6$ だから

$$|\overrightarrow{MP}| = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

【総評】 難度 5, 計算量 5. 想定時間は 15 分程度。正四面体では $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ 、相互の内積が $1/2$ である。平面 DEF は切片型でもアフィン結合でも処理でき、両方で $MP : PN = 1 : 5$ が得られる。比 $OD : DA = 1 : 1$ 、 $OE : EB = 2 : 1$ 、 $OF : FC = 2 : 3$ を位置ベクトルへ正確に移すことが最重要である。

【第 3 問】

実数 a に対し、 xy 平面上の曲線 $y = x^3 - ax$ を C とする。 C 上の異なる 2 点 P_1, P_2 と、2 つの直線 l_1, l_2 があり、 $k = 1, 2$ に対して以下の条件をみたしている。

- (i) P_k の x 座標は正である。
- (ii) l_k は P_k を通り、さらに P_k における C の接線と直交する。
- (iii) l_k は P_k 以外の点で C と接する。

次の問いに答えよ。

- (1) a のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $k = 1, 2$ に対して、 C と l_k によって囲まれる部分の面積を S_k とする。 $S_1 + S_2$ を a の式で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

P の x 座標を $p > 0$ 、 l が接する別の点の x 座標を q とする。接線の式が P を通る条件から $(p - q)^2(p + 2q) = 0$ を得て、 $q = -p/2$ と決まる。さらに、 P での接線と q での接線の傾きが直交する条件から $u = p^2$ の二次方程式を作り、正の 2 解をもつ条件を調べる。面積は重接点と単純交点をもつ三次式の積分として計算する。

【解答】

(1) P の x 座標を $p > 0$ 、 l が P 以外で C と接する点の x 座標を q とする。 q における接線は

$$y = (3q^2 - a)(x - q) + q^3 - aq = (3q^2 - a)x - 2q^3$$

である。これが $P(p, p^3 - ap)$ を通るから

$$p^3 - ap = (3q^2 - a)p - 2q^3$$

すなわち

$$p^3 - 3pq^2 + 2q^3 = (p - q)^2(p + 2q) = 0$$

である。 P は接点と異なるので $p \neq q$ であり、よって $q = -p/2$ である。

また l は P における接線と直交するので

$$(3p^2 - a)(3q^2 - a) = -1.$$

$q = -p/2$ を代入し, $u = p^2$ とおくと

$$9u^2 - 15au + 4(a^2 + 1) = 0. \quad (1)$$

異なる 2 点 P_1, P_2 が存在するには, (1) が正の異なる 2 解をもてばよい。解の和は $5a/3$, 積は $4(a^2 + 1)/9 > 0$ であるから $a > 0$ が必要である。さらに判別式が正である条件は

$$(15a)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4(a^2 + 1) > 0 \iff 9a^2 - 16 > 0.$$

以上より $a > 4/3$ である。

(2) 曲線と q における接線との差は

$$x^3 - ax - \{(3q^2 - a)x - 2q^3\} = (x - q)^2(x - p)$$

である。したがって囲まれる面積は

$$S = \int_q^p (x - q)^2(p - x) dx.$$

$d = p - q = 3p/2$ とおくと

$$S = \int_0^d X^2(d - X) dX = \frac{d^4}{12} = \frac{27p^4}{64}.$$

(1) の 2 解を $u_1 = p_1^2, u_2 = p_2^2$ とすると

$$u_1^2 + u_2^2 = \left(\frac{5a}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4(a^2 + 1)}{9} = \frac{17a^2 - 8}{9}.$$

よって

$$S_1 + S_2 = \frac{27}{64}(u_1^2 + u_2^2) = \frac{3(17a^2 - 8)}{64}.$$

▶ 解法 2

【方針】

別の接点の x 座標を最初から $t < 0$ とおく。接線と曲線の差の因数分解から P の座標を $-2t$ と読み、 $T = t^2$ の二次方程式へ直接落とす。

【解答】

(1) l が C と接する点の x 座標を t とする。接線を l_t と書けば

$$f(x) - l_t(x) = x^3 - ax - \{(3t^2 - a)x - 2t^3\} = (x - t)^2(x + 2t). \quad (1)$$

したがって、この接線と C のもう 1 つの交点 P の x 座標は $-2t$ である。これが正なので $t < 0$ である。

P における接線の傾きは $12t^2 - a$ 、 l_t の傾きは $3t^2 - a$ である。両者が直交する条件は

$$(12t^2 - a)(3t^2 - a) = -1.$$

$T = t^2 > 0$ とおくと

$$36T^2 - 15aT + a^2 + 1 = 0. \quad (2)$$

(2) が正の異なる 2 解をもつ条件を調べる。積は常に正、和は $5a/12$ なので $a > 0$ が必要であり、判別式は

$$D = 225a^2 - 144(a^2 + 1) = 9(9a^2 - 16).$$

よって $D > 0$ も合わせると $a > 4/3$ となる。

(2) (1) より、 $t \leq x \leq -2t$ では曲線が接線の下側にある。 $d = -3t > 0$ 、 $X = x - t$ とおけば

$$S = - \int_t^{-2t} (x - t)^2(x + 2t) dx = \int_0^d X^2(d - X) dX = \frac{d^4}{12} = \frac{27}{4}T^2.$$

(2) の 2 解を T_1, T_2 とすると

$$T_1 + T_2 = \frac{5a}{12}, \quad T_1 T_2 = \frac{a^2 + 1}{36},$$

したがって

$$T_1^2 + T_2^2 = \frac{25a^2}{144} - \frac{a^2 + 1}{18} = \frac{17a^2 - 8}{144}.$$

ゆえに

$$S_1 + S_2 = \frac{27}{4}(T_1^2 + T_2^2) = \frac{3(17a^2 - 8)}{64}.$$

【総評】 難度 8, 計算量 8。想定時間は 30 分程度。核心は、三次関数とその接線の差が重接点をもつため $(x - t)^2(x + 2t)$ と因数分解できることにある。これで正の x 座標をもつ点 P と負の接点が一対に定まり、直交条件は平方 $T = t^2$ の二次方程式へ落ちる。面積も

$$\int_0^d X^2(d - X) dX = d^4/12$$

という共通形に整理すると符号ミスを防げる。