

横浜国立大学 2020 年度 文系

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

空間内に 4 点 O, A, B, C があり、

$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1$$

および

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA} = k \quad (0 < k < 1)$$

を満たしている。ただし、 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ は $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ の内積を表す。

三角形 ABC の重心を M とする。線分 OM 上に点 P があり、

$$\angle APB = 90^\circ$$

を満たしている。次の 2 量をそれぞれ k の式で表せ。

$$\frac{|\vec{OP}|}{|\vec{OM}|}, \quad |\vec{AP}|$$

▶ 解法 1 (重心ベクトルと直交条件を使う)

【方針】

3 本の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ とし、重心ベクトルを $\mathbf{m}$ とする。 P が線分 OM 上にあることを $\vec{OP} = t\mathbf{m}$ と表し、 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$ を t の二次方程式にする。

【解答】

次のようにおく。

$$\mathbf{a} = \vec{OA}, \quad \mathbf{b} = \vec{OB}, \quad \mathbf{c} = \vec{OC}.$$

重心の位置ベクトルは

$$\mathbf{m} = \vec{OM} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

与えられた内積から

$$\begin{aligned} |\mathbf{m}|^2 &= \frac{|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2}{9} \\ &= \frac{3 + 6k}{9} = \frac{1 + 2k}{3} \end{aligned}$$

である。また

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{m} = \frac{1 + 2k}{3}.$$

P は線分 OM 上にあるので

$$\vec{OP} = t\mathbf{m} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

とおける。直角条件は

$$(\mathbf{a} - t\mathbf{m}) \cdot (\mathbf{b} - t\mathbf{m}) = 0$$

であるから

$$k - \frac{2(1+2k)}{3}t + \frac{1+2k}{3}t^2 = 0.$$

したがって

$$t^2 - 2t + \frac{3k}{1+2k} = 0,$$

よって

$$t = 1 \pm \sqrt{\frac{1-k}{1+2k}}.$$

$0 < k < 1$ で $0 \leq t \leq 1$ を満たすのは負号の方だけなので

$$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OM}|} = t = 1 - \sqrt{\frac{1-k}{1+2k}}.$$

次に

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = |\mathbf{a} - t\mathbf{m}|^2 = 1 - \frac{2(1+2k)}{3}t + \frac{1+2k}{3}t^2.$$

直交条件の式と比べると、後ろ 2 項の和は $-k$ である。したがって

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = 1 - k.$$

長さは正だから

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{1-k}.$$

以上より

$$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OM}|} = 1 - \sqrt{\frac{1-k}{1+2k}}, \quad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{1-k}.$$

▶ 解法 2 (直角二等辺三角形を先に使う)

【方針】

対称性から $AP = BP$ を示す。 $\angle APB = 90^\circ$ なので三角形 APB は直角二等辺三角形となり、 AB から AP を直ちに求められる。その値を $P = tM$ の距離式に戻して比を決める。

【解答】

解法 1 と同じ記号

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}, \quad \overrightarrow{OP} = t\mathbf{m}$$

を用いる。ここで

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{b}, \quad |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$$

だから

$$AP^2 - BP^2 = |\mathbf{a} - t\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{b} - t\mathbf{m}|^2 = 0.$$

したがって $AP = BP$ である。さらに $\angle APB = 90^\circ$ なので、三角形 APB は直角二等辺三角形である。

一方

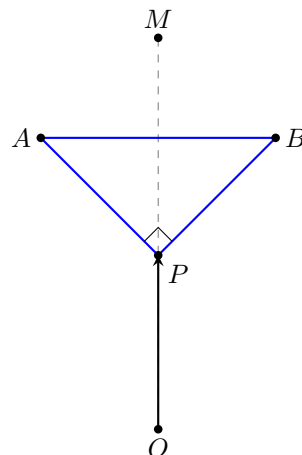
$$AB^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(1-k).$$

ピタゴラスの定理より

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 = 2AP^2$$

だから

$$AP = \sqrt{1-k}.$$



位置関係の模式図

あとは

$$|m|^2 = \frac{1+2k}{3}$$

および

$$AP^2 = 1 - \frac{2(1+2k)}{3}t + \frac{1+2k}{3}t^2 = 1 - k$$

を使うと

$$t^2 - 2t + \frac{3k}{1+2k} = 0.$$

$0 \leq t \leq 1$ から

$$t = 1 - \sqrt{\frac{1-k}{1+2k}}.$$

よって

$$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OM}|} = 1 - \sqrt{\frac{1-k}{1+2k}}, \quad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{1-k}.$$

【総評】 難度 5、目安時間 15 分。重心ベクトルに対する 3 頂点の内積が等しいことが対称性の核である。直交条件を二次方程式にする標準解法に加え、 $AP = BP$ と直角条件から AP を先に決めると計算を短縮できる。比の二次方程式では、 P が線分 OM 上にある条件で解を一つに絞る。

【第 2 問】

中身の見えない 2 つの箱 A, B がある。箱 A には白玉と赤玉がそれぞれ 2 個ずつ入っており、箱 B には白玉 1 個だけが入っている。 n を正の整数として、次の操作 $(*)$ を考える。

$(*)$ はじめに箱 A の中身をよくかきまぜ、箱 A から玉を 2 個取り出し、色を確認しないで箱 B に 2 個とも入れる。次に「箱 B の中身をよくかきまぜ、箱 B から玉を 1 個取り出し、色を確認した後、箱 B に戻す」という作業を n 回繰り返す。

操作 $(*)$ を一度行ったとき、箱 B から取り出した玉が n 回ともすべて白玉である確率を p_n とする。また、その n 回がすべて白玉であったという条件のもとで、はじめに箱 A から取り出した玉が 2 個とも白玉である条件付き確率を q_n とする。

- (1) p_2, q_2 を求めよ。
- (2) p_n, q_n を求めよ。
- (3)

$$q_n > \frac{1}{2}$$

を満たす最小の n を求めよ。

▶ 解法 1 (3 状態に分けて全確率を使う)

【方針】

箱 A から移した 2 個の色を「白白・白赤・赤赤」の 3 状態に分ける。各状態の確率と、その状態で n 回とも白を引く確率を掛けて足し、条件付き確率は同時確率を p_n で割る。

【解答】

(1)

箱 A から取り出す 2 個の色と、その後の箱 B の状態を整理すると

移した色	確率	箱 B の白玉数	n 回とも白の確率
白白	$\frac{1}{6}$	3	1
白赤	$\frac{4}{6}$	2	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$
赤赤	$\frac{1}{6}$	1	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

となる。したがって

$$p_2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{13}{27}.$$

また「最初が白白、かつ 2 回とも白」の確率は $1/6$ なので

$$q_2 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{27}} = \frac{9}{26}.$$

(2)

同じ表から

$$p_n = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3^n + 2^{n+2} + 1}{6 \cdot 3^n}.$$

また

$$q_n = \frac{\frac{1}{6}}{p_n} = \frac{3^n}{3^n + 2^{n+2} + 1}.$$

(3)

条件は

$$3^n > 2^{n+2} + 1.$$

$n = 1, 2, 3$ では成り立たず、 $n = 4$ では

$$3^4 = 81 > 65 = 2^6 + 1.$$

さらに

$$h_n = 3^n - 2^{n+2} - 1$$

とおけば

$$h_{n+1} = 3h_n + 2^{n+2} + 2.$$

したがって $h_n > 0$ となった後は正のままである。よって最小の n は

4

である。

▶ 解法 2 (事後確率の重みを直接比較する)

【方針】

3 状態の事前確率と「すべて白」という観測の尤度を掛け、観測後の重みを比で並べる。正規化前の重みだけで q_n が求まり、同じ重みの総和から p_n も復元できる。

【解答】

(1)

最初に移した色を

$$H_2 = \text{白白}, \quad H_1 = \text{白赤}, \quad H_0 = \text{赤赤}$$

とする。それぞれの事前確率の比は

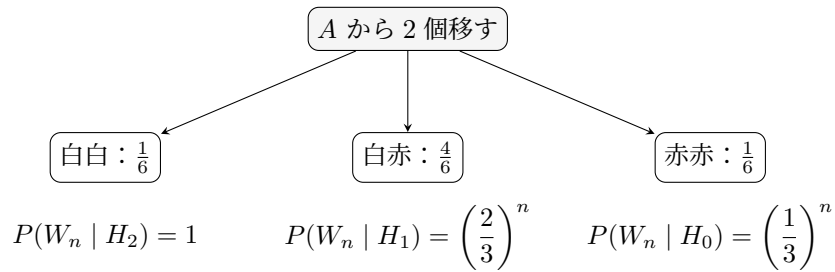
$$P(H_2) : P(H_1) : P(H_0) = 1 : 4 : 1.$$

「 n 回とも白」という観測を W_n とすると

$$P(W_n | H_2) = 1, \quad P(W_n | H_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad P(W_n | H_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

したがって観測後の正規化前の重みは

$$1, \quad 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$



$n = 2$ のとき、正規化前の重みは

$$1, \quad \frac{16}{9}, \quad \frac{1}{9}$$

だから

$$q_2 = \frac{9}{26}.$$

また全確率から

$$p_2 = \frac{13}{27}.$$

(2)

一般の n について、上の重みから

$$q_n = \frac{1}{1 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{3^n}{3^n + 2^{n+2} + 1}.$$

また

$$p_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} = \frac{3^n + 2^{n+2} + 1}{6 \cdot 3^n}.$$

(3)

$q_n > 1/2$ は

$$3^n > 2^{n+2} + 1$$

と同値である。解法 1 の h_n の関係から、最小の n は

$$4$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 15 分。繰り返し抽出は復元抽出なので、最初に移した 2 個の色が決まれば各回の白確率は一定である。全確率の方法と事後重みの方法は同じ 3 状態を異なる順序で整理している。(3) は $n = 4$ の確認だけでなく、それ以後も不等式が保たれる理由まで示す。

【第 3 問】

実数 a, b に対し

$$f(x) = -x^3 + (a+2)x^2 - (3a-b-2)x - 3(b-1)$$

と定める。 xy 平面上で $y = f(x)$ が表す曲線を C とする。

- (1) どのような a, b に対しても、 C はある定点を通ることを示せ。
- (2) $f(x)$ は極値をとるとする。 C が x 軸に接するような (a, b) の存在範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (3) (a, b) が (2) で求めた範囲にあるとき、 $f(x)$ の極値を a の式で表せ。

▶ 解法 1 (定点から因数分解し、重根を分類する)

【方針】

$f(x)$ を a, b について整理して定点を見つける。その定点に対応する因子 $x-3$ を取り出し、 $x=3$ が重根になる場合と二次因子自身が重根をもつ場合に分ける。

【解答】

(1)

$f(x)$ を a, b について整理すると

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 2x + 3 + a(x^2 - 3x) + b(x - 3).$$

$x=3$ では a, b を含む係数がともに 0 となり

$$f(3) = 0.$$

したがって C は常に定点

$$(3, 0)$$

を通る。

(2)

因数分解すると

$$f(x) = -(x-3)\{x^2 + (1-a)x + 1-b\}.$$

C が x 軸に接するための必要十分条件は、 $f(x) = 0$ が重根をもつことである。

$x=3$ が二次因子の根でもある場合は

$$9 + 3(1-a) + 1-b = 0,$$

したがって

$$b = 13 - 3a.$$

二次因子が重根をもつ場合は

$$(1-a)^2 - 4(1-b) = 0,$$

したがって

$$b = 1 - \frac{(a-1)^2}{4}.$$

直線と放物線は

$$(a, b) = (7, -8)$$

で接する。このとき

$$f(x) = -(x-3)^3$$

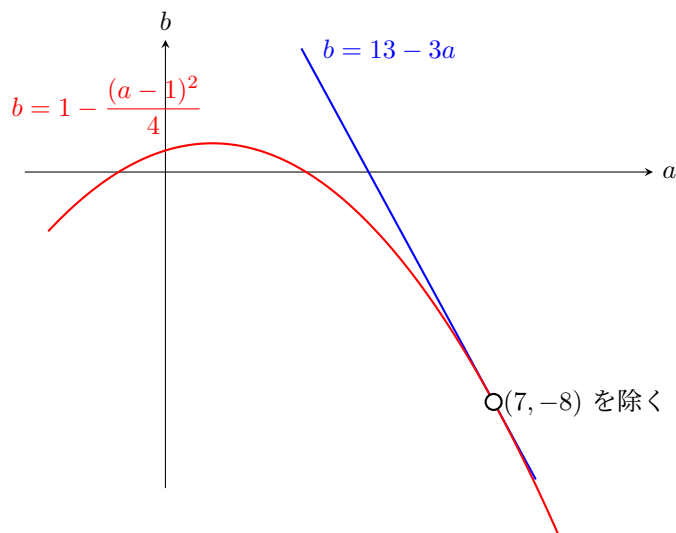
となり、 f は極値をとらない。したがって求める集合は

$$b = 13 - 3a$$

と

$$b = 1 - \frac{(a-1)^2}{4}$$

の和集合から、点 $(7, -8)$ を除いたものである。



(3)

直線上では

$$f(x) = -(x-3)^2\{x-(a-4)\},$$

したがって

$$f'(x) = -(x-3)\{3x-(2a-5)\}.$$

$a \neq 7$ なので二つの停留点は異なり、極値は

$$0, \quad -\frac{4(7-a)^3}{27}.$$

放物線上では

$$f(x) = -(x-3)\left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2.$$

停留点は

$$x = \frac{a-1}{2}, \quad x = \frac{a+11}{6}$$

であり、極値は

$$0, \quad \frac{(7-a)^3}{54}.$$

▶ 解法 2 (重根と残りの根の一般形を使う)

【方針】

接点の x 座標を重根 r 、残りの根を s として $f(x) = -(x-r)^2(x-s)$ と表す。常に根 3 をもつことから $r = 3$ または $s = 3$ に分け、係数比較で a, b を決める。

【解答】

(1)

a, b によらず

$$f(3) = 0$$

なので、定点は $(3, 0)$ である。

(2)

接点の x 座標を重根 r 、残りの根を s とする。最高次係数が -1 なので

$$f(x) = -(x-r)^2(x-s).$$

また 3 は常に根だから、次の 2 場合だけを考えればよい。

場合	r	s
I	3	$a-4$
II	$\frac{a-1}{2}$	3

I では

$$f(x) = -(x-3)^2\{x-(a-4)\}$$

となり、係数比較から

$$b = 13 - 3a.$$

II では

$$f(x) = -\left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2 (x-3)$$

となり

$$b = 1 - \frac{(a-1)^2}{4}.$$

両方で $r = s = 3$ となるのは $(a, b) = (7, -8)$ で、このとき三重根となって極値をもたない。よって解法 1 の図の 2 曲線から $(7, -8)$ を除く。

(3)

一般に

$$g(x) = -(x-r)^2(x-s)$$

とすると

$$g'(x) = -(x-r)(3x-r-2s).$$

二つの停留点での値は

$$0, \quad \frac{4(s-r)^3}{27}.$$

I では $r = 3, s = a - 4$ なので

$$0, \quad -\frac{4(7-a)^3}{27}.$$

II では

$$r = \frac{a-1}{2}, \quad s = 3$$

なので

$$0, \quad \frac{4}{27} \left(\frac{7-a}{2}\right)^3 = \frac{(7-a)^3}{54}.$$

【総評】 難度 7、目安時間 28 分。定点 $(3, 0)$ は単なる (1) の答えではなく、以後の因数 $x-3$ を与える誘導である。接する条件を重根として分類すると、直線と放物線が現れる。交点 $(7, -8)$ は三重根で単調となるため必ず除外する。領域図では曲線全体を示し、除外点を白丸で表した。