

入 学 試 験 問 題

数 学



横 浜 国 立 大 学 2020 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) 関数

$$f(x) = (e^x - 1) \cos x - \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

の増減と極値を調べ、そのグラフの概形を描け。ただし、グラフの凹凸と変曲点は調べなくてよい。

第 1 問

次の問いに答えよ。

(2) 定積分

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\log(\sin x)}{\tan x} dx$$

を求めよ。

第 2 問

次の問いに答えよ。

(1) 実数 A, B, C, D に対して

$$z = \frac{A + \sqrt{5}Bi}{C + \sqrt{5}Di}$$

と定める。ただし

$$C + \sqrt{5}Di \neq 0$$

とする。 $z = x + yi$ を満たす実数 x, y を A, B, C, D の式で表せ。

(2) 次を満たす整数 A, B, C, D を求めよ。

$$\begin{cases} \frac{16 + \sqrt{5}i}{29} = \frac{A + \sqrt{5}Bi}{C + \sqrt{5}Di}, \\ AD - BC = -1, \\ D > 0 \end{cases}$$

第 3 問

中身の見えない2つの箱 A, B がある。箱 A には白玉と赤玉がそれぞれ2個ずつ入っており、箱 B には白玉1個だけが入っている。 n を正の整数として、次の操作 $(*)$ を考える。

$(*)$ はじめに箱 A の中身をよくかきまぜ、箱 A から玉を2個取り出し、色を確認しないで箱 B に2個とも入れる。次に「箱 B の中身をよくかきまぜ、箱 B から玉を1個取り出し、色を確認した後、箱 B に戻す」という作業を n 回繰り返す。

操作 $(*)$ を一度行ったとき、箱 B から取り出した玉が n 回ともすべて白玉である確率を p_n とする。また、その n 回がすべて白玉であったという条件のもとで、はじめに箱 A から取り出した玉が2個とも白玉である条件付き確率を q_n とする。

(1) p_2, q_2 を求めよ。

(2) p_n, q_n を求めよ。

(3)

$$q_n > \frac{1}{2}$$

を満たす最小の n を求めよ。

第 4 問

xyz 空間に、2 点

$$A(1, 2, 9), \quad B(-3, 6, 7)$$

を通る直線 l がある。また、 l 上の点 P, Q と、 x 軸上の点 R, S は

$$PR \perp xy\text{平面}, \quad QS \perp x\text{軸}, \quad QS \perp l$$

を満たす。

- (1) P, R の座標を求めよ。
- (2) Q, S の座標を求めよ。
- (3) 線分 PQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面と、 P を含む x 軸に垂直な平面と、 Q を含む x 軸に垂直な平面で囲まれた立体の体積を求めよ。

第 5 問

a を正の実数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$I_n = \int_0^1 x^{n+a-1} e^{-x} dx$$

と定める。

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$I_n \leq \frac{1}{n+a}$$

を示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$I_{n+1} - (n+a)I_n$$

を求めよ。

(3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$$

を求めよ。

(4) 実数 b, c に対して

$$J_n = n^3 \left(I_n + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。数列 $\{J_n\}$ が収束するとき、次の問いに答えよ。

(ア) b を求めよ。

(イ) c を a の式で表せ。

(ウ) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$$

を a の式で表せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)