

横浜国立大学 2020 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(1) 関数

$$f(x) = (e^x - 1) \cos x - \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

の増減と極値を調べ、そのグラフの概形を描け。ただし、グラフの凹凸と変曲点は調べなくてよい。

▶ 解法 1 (導関数を積の形にして符号を読む)

【方針】

導関数を $(e^x - 1)(\cos x - \sin x)$ と因数分解する。それぞれの因子が 0 になる $x = 0, \pi/4$ で区間を分け、増減表、端点値、極値をグラフへ反映する。

【解答】

(1)

微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \cos x - (e^x - 1) \sin x - \cos x \\ &= (e^x - 1)(\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

区間内で

$$e^x - 1 \begin{cases} < 0 & (x < 0), \\ = 0 & (x = 0), \\ > 0 & (x > 0) \end{cases}$$

である。また

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

より、その符号は $x = \pi/4$ の前後で正から負へ変わる。

したがって

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	1	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{\pi/4} - 2)$	$\searrow$ -1

となる。

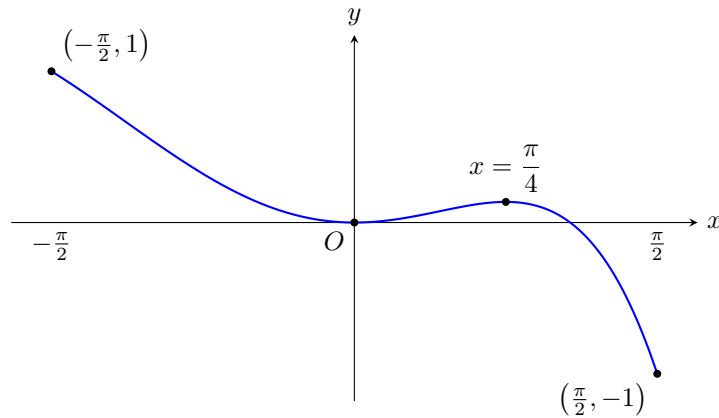
よって $x = 0$ で極小値

$$0$$

をとり、 $x = \pi/4$ で極大値

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{\pi/4} - 2)$$

をとる。この極大値は正である。



▶ 解法 2 (二つの因子の符号表を先に作る)

【方針】

導関数の二因子を別々の符号表にし、符号の積だけで増減を決める。グラフについては、増減に加えて 4 つの主要値と極大値の正負を確認する。

【解答】

(1)

導関数は

$$f'(x) = (e^x - 1)(\cos x - \sin x)$$

である。二因子の符号を並べると

x	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
$e^x - 1$	-	0	+	+	+
$\cos x - \sin x$	+	+	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	0	-

となる。したがって、順に減少・増加・減少である。

主要な値は

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f(0) = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{\pi/4} - 2), \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

また

$$e^{\pi/4} > 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 > 2$$

だから、極大値は正である。

よって極小値は

$$f(0) = 0,$$

極大値は

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{\pi/4} - 2)$$

であり、グラフは解法 1 の図の形になる。

【総評】 難度 5、目安時間 12 分。導関数が二つの因子に分かれるため、零点 $0, \pi/4$ を境に符号を丁寧に掛け合わせる。グラフでは端点値、2 つの極値、極大値が正であることを反映する。実際の曲線を図示し、単なる文章説明で済ませない。

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(2) 定積分

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\log(\sin x)}{\tan x} dx$$

を求めよ。

▶ 解法 1 (対数微分をそのまま使う)

【方針】

被積分関数を $\log(\sin x)$ とその導関数の積と見る。 $u = \log(\sin x)$ とおけば、積分は u の一次式になる。

【解答】

(2)

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

である。ここで

$$u = \log(\sin x)$$

とおくと

$$du = \frac{\cos x}{\sin x} dx.$$

端点は

$$x = \frac{\pi}{6} \implies u = \log \frac{1}{2}, \quad x = \frac{\pi}{4} \implies u = \log \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\log(\sin x)}{\tan x} dx &= \int_{\log(1/2)}^{\log(\sqrt{2}/2)} u du \\ &= \frac{1}{2} [u^2]_{\log(1/2)}^{\log(\sqrt{2}/2)}. \end{aligned}$$

さらに

$$\log \frac{1}{2} = -\log 2, \quad \log \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \log 2$$

だから

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \log 2 \right)^2 - (-\log 2)^2 \right\} = -\frac{3}{8} (\log 2)^2.$$

よって求める値は

$$-\frac{3}{8} (\log 2)^2$$

である。

▶ 解法 2 (正弦を新しい変数にする)

【方針】

まず $t = \sin x$ とおき、積分を $\log t/t$ の形へ変える。その原始関数 $(\log t)^2/2$ を端点で評価する。

【解答】

(2)

$$t = \sin x$$

とおくと

$$dt = \cos x \, dx$$

であり

$$\frac{dx}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} dx = \frac{dt}{t}.$$

また積分区間は

$$\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

よって

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\log(\sin x)}{\tan x} dx &= \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\log t}{t} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} (\log t)^2 \right]_{1/2}^{\sqrt{2}/2}. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} (\log 2)^2 - (\log 2)^2 \right\} = -\frac{3}{8} (\log 2)^2.$$

ゆえに

$$-\frac{3}{8} (\log 2)^2$$

である。

【総評】 難度 3、目安時間 6 分。積分は必ず別行立てし、 $\log(\sin x)$ の対数微分を見抜く。直接 $u = \log(\sin x)$ とおく方法と、先に $t = \sin x$ とおく方法は同じ原始関数へ到達する。端点の対数がともに負であるため、二乗後の差の順序に注意する。

【第 2 問】

次の問いに答えよ。

(1) 実数 A, B, C, D に対して

$$z = \frac{A + \sqrt{5}Bi}{C + \sqrt{5}Di}$$

と定める。ただし

$$C + \sqrt{5}Di \neq 0$$

とする。 $z = x + yi$ を満たす実数 x, y を A, B, C, D の式で表せ。

(2) 次を満たす整数 A, B, C, D を求めよ。

$$\begin{cases} \frac{16 + \sqrt{5}i}{29} = \frac{A + \sqrt{5}Bi}{C + \sqrt{5}Di}, \\ AD - BC = -1, \\ D > 0 \end{cases}$$

▶ 解法 1 (共役複素数を掛けて実部・虚部を比較する)

【方針】

(1) は分母の共役複素数を掛ける。(2) は虚部と $AD - BC = -1$ を組み合わせて $C^2 + 5D^2 = 29$ を得て、 $D > 0$ の整数条件で候補を絞る。

【解答】

(1)

分母の共役複素数を掛けると

$$\begin{aligned} z &= \frac{(A + \sqrt{5}Bi)(C - \sqrt{5}Di)}{C^2 + 5D^2} \\ &= \frac{AC + 5BD}{C^2 + 5D^2} + \frac{\sqrt{5}(BC - AD)}{C^2 + 5D^2}i. \end{aligned}$$

したがって

$$x = \frac{AC + 5BD}{C^2 + 5D^2}, \quad y = \frac{\sqrt{5}(BC - AD)}{C^2 + 5D^2}.$$

(2)

条件 $AD - BC = -1$ から

$$BC - AD = 1.$$

虚部を比較すると

$$\frac{\sqrt{5}}{C^2 + 5D^2} = \frac{\sqrt{5}}{29}$$

だから

$$C^2 + 5D^2 = 29.$$

$D > 0$ であり、 $D \geq 3$ なら左辺は 45 以上になる。 $D = 1$ では $C^2 = 24$ となり不適で、 $D = 2$ では

$$C^2 = 9.$$

よって

$$D = 2, \quad C = \pm 3.$$

実部の比較から

$$AC + 5BD = 16.$$

$C = 3, D = 2$ のとき

$$3A + 10B = 16, \quad 2A - 3B = -1$$

となるが、解は整数でない。

$C = -3, D = 2$ のとき

$$-3A + 10B = 16, \quad 2A + 3B = -1.$$

これを解くと

$$A = -2, \quad B = 1.$$

したがって

$$(A, B, C, D) = (-2, 1, -3, 2).$$

▶ 解法 2 (もとの等式を交差に掛ける)

【方針】

分数形の複素数をそのまま交差に掛け、実部と虚部の一次式を作る。そこから $AD - BC$ を計算すると、 A, B が消えて $C^2 + 5D^2 = 29$ が直接得られる。

【解答】

(1)

共役複素数を掛ければ

$$x = \frac{AC + 5BD}{C^2 + 5D^2}, \quad y = \frac{\sqrt{5}(BC - AD)}{C^2 + 5D^2}.$$

(2)

与えられた複素数の等式を交差に掛けると

$$29(A + \sqrt{5}Bi) = (16 + \sqrt{5}i)(C + \sqrt{5}Di).$$

右辺を展開して実部・虚部を比較すると

$$29A = 16C - 5D, \quad 29B = C + 16D.$$

したがって

$$A = \frac{16C - 5D}{29}, \quad B = \frac{C + 16D}{29}.$$

これを $AD - BC$ に代入すると

$$\begin{aligned} AD - BC &= \frac{D(16C - 5D) - C(C + 16D)}{29} \\ &= -\frac{C^2 + 5D^2}{29}. \end{aligned}$$

条件 $AD - BC = -1$ より

$$C^2 + 5D^2 = 29.$$

$D > 0$ から

$$D = 2, \quad C = \pm 3.$$

$C = 3, D = 2$ では

$$A = \frac{38}{29}, \quad B = \frac{35}{29}$$

となって整数でない。一方 $C = -3, D = 2$ では

$$A = -2, \quad B = 1.$$

よって

$$(A, B, C, D) = (-2, 1, -3, 2)$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 14 分。(1) の共役計算は (2) の準備である。標準解法では虚部と行列式型の条件を組み合わせ、別解では交差積から $AD - BC$ を直接計算する。どちらも $C^2 + 5D^2 = 29$ へ集約され、 $D > 0$ により候補はごく少数になる。

【第 3 問】

中身の見えない 2 つの箱 A, B がある。箱 A には白玉と赤玉がそれぞれ 2 個ずつ入っており、箱 B には白玉 1 個だけが入っている。 n を正の整数として、次の操作 $(*)$ を考える。

$(*)$ はじめに箱 A の中身をよくかきまぜ、箱 A から玉を 2 個取り出し、色を確認しないで箱 B に 2 個とも入れる。次に「箱 B の中身をよくかきまぜ、箱 B から玉を 1 個取り出し、色を確認した後、箱 B に戻す」という作業を n 回繰り返す。

操作 $(*)$ を一度行ったとき、箱 B から取り出した玉が n 回ともすべて白玉である確率を p_n とする。また、その n 回がすべて白玉であったという条件のもとで、はじめに箱 A から取り出した玉が 2 個とも白玉である条件付き確率を q_n とする。

- (1) p_2, q_2 を求めよ。
- (2) p_n, q_n を求めよ。
- (3)

$$q_n > \frac{1}{2}$$

を満たす最小の n を求めよ。

▶ 解法 1 (3 状態に分けて全確率を使う)

【方針】

箱 A から移した 2 個の色を「白白・白赤・赤赤」の 3 状態に分ける。各状態の確率と、その状態で n 回とも白を引く確率を掛けて足し、条件付き確率は同時確率を p_n で割る。

【解答】

(1)

箱 A から取り出す 2 個の色と、その後の箱 B の状態を整理すると

移した色	確率	箱 B の白玉数	n 回とも白の確率
白白	$\frac{1}{6}$	3	1
白赤	$\frac{4}{6}$	2	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$
赤赤	$\frac{1}{6}$	1	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

となる。したがって

$$p_2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{13}{27}.$$

また「最初が白白、かつ 2 回とも白」の確率は $1/6$ なので

$$q_2 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{27}} = \frac{9}{26}.$$

(2)

同じ表から

$$p_n = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3^n + 2^{n+2} + 1}{6 \cdot 3^n}.$$

また

$$q_n = \frac{\frac{1}{6}}{p_n} = \frac{3^n}{3^n + 2^{n+2} + 1}.$$

(3)

条件は

$$3^n > 2^{n+2} + 1.$$

$n = 1, 2, 3$ では成り立たず、 $n = 4$ では

$$3^4 = 81 > 65 = 2^6 + 1.$$

さらに

$$h_n = 3^n - 2^{n+2} - 1$$

とおけば

$$h_{n+1} = 3h_n + 2^{n+2} + 2.$$

したがって $h_n > 0$ となった後は正のままである。よって最小の n は

4

である。

▶ 解法 2 (事後確率の重みを直接比較する)

【方針】

3 状態の事前確率と「すべて白」という観測の尤度を掛け、観測後の重みを比で並べる。正規化前の重みだけで q_n が求まり、同じ重みの総和から p_n も復元できる。

【解答】

(1)

最初に移した色を

$$H_2 = \text{白白}, \quad H_1 = \text{白赤}, \quad H_0 = \text{赤赤}$$

とする。それぞれの事前確率の比は

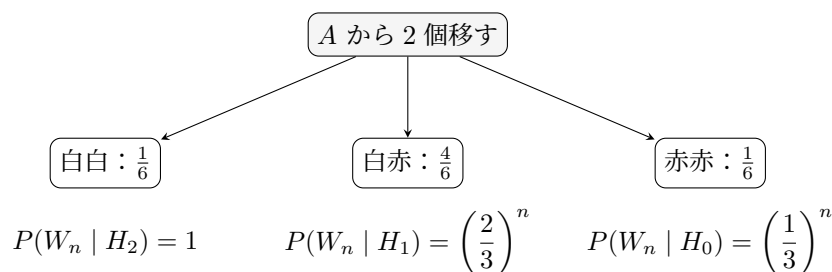
$$P(H_2) : P(H_1) : P(H_0) = 1 : 4 : 1.$$

「 n 回とも白」という観測を W_n とすると

$$P(W_n | H_2) = 1, \quad P(W_n | H_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad P(W_n | H_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

したがって観測後の正規化前の重みは

$$1, \quad 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$



$n = 2$ のとき、正規化前の重みは

$$1, \quad \frac{16}{9}, \quad \frac{1}{9}$$

だから

$$q_2 = \frac{9}{26}.$$

また全確率から

$$p_2 = \frac{13}{27}.$$

(2)

一般の n について、上の重みから

$$q_n = \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{3^n}{3^n + 2^{n+2} + 1}.$$

また

$$p_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 + 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} = \frac{3^n + 2^{n+2} + 1}{6 \cdot 3^n}.$$

(3)

$q_n > 1/2$ は

$$3^n > 2^{n+2} + 1$$

と同値である。解法 1 の h_n の関係から、最小の n は

4

である。

【総評】 難度 5、目安時間 15 分。繰り返し抽出は復元抽出なので、最初に移した 2 個の色が決まれば各回の白確率は一定である。全確率の方法と事後重みの方法は同じ 3 状態を異なる順序で整理している。(3) は $n = 4$ の確認だけでなく、それ以後も不等式が保たれる理由まで示す。

【第 4 問】

xyz 空間に、2 点

$$A(1, 2, 9), \quad B(-3, 6, 7)$$

を通る直線 l がある。また、 l 上の点 P, Q と、 x 軸上の点 R, S は

$$PR \perp xy\text{平面}, \quad QS \perp x\text{軸}, \quad QS \perp l$$

を満たす。

(1) P, R の座標を求めよ。

(2) Q, S の座標を求めよ。

(3) 線分 PQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面と、 P を含む x 軸に垂直な平面と、 Q を含む x 軸に垂直な平面で囲まれた立体の体積を求めよ。

▶ 解法 1 (直線を媒介表示し、断面積を積分する)

【方針】

直線 l を 1 変数で表す。(1) は P の y 座標が 0 になる条件、(2) は $\overrightarrow{SQ}$ と直線 l の方向ベクトルの内積が 0 になる条件で決める。(3) は x 軸からの距離の二乗を x の式にして積分する。

【解答】

(1)

直線 l の方向ベクトルとして

$$(-2, 2, -1)$$

をとると、 l 上の点は

$$(1 - 2s, 2 + 2s, 9 - s)$$

と表せる。

$PR \perp xy$ 平面で R が x 軸上にあるため、 P の y 座標は 0 である。よって

$$2 + 2s = 0$$

から $s = -1$ となり

$$P = (3, 0, 10), \quad R = (3, 0, 0).$$

(2)

$$Q = (1 - 2s, 2 + 2s, 9 - s)$$

とする。 $QS \perp x$ 軸で S が x 軸上にあるので

$$S = (1 - 2s, 0, 0),$$

したがって

$$\overrightarrow{SQ} = (0, 2 + 2s, 9 - s).$$

これが l の方向ベクトルと垂直だから

$$(0, 2 + 2s, 9 - s) \cdot (-2, 2, -1) = 0.$$

すなわち

$$2(2 + 2s) - (9 - s) = 0$$

より $s = 1$ である。よって

$$Q = (-1, 4, 8), \quad S = (-1, 0, 0).$$

(3)

$x = 1 - 2s$ だから

$$s = \frac{1 - x}{2}.$$

線分 PQ 上で

$$-1 \leq x \leq 3$$

であり

$$y = 3 - x, \quad z = \frac{17 + x}{2}.$$

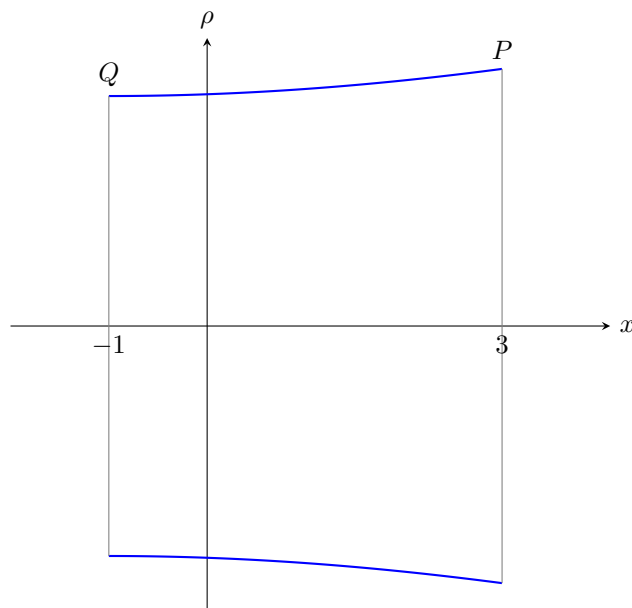
したがって x 軸からの距離の二乗は

$$\begin{aligned} \rho(x)^2 &= y^2 + z^2 \\ &= (3 - x)^2 + \left(\frac{17 + x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{5x^2 + 10x + 325}{4}. \end{aligned}$$

よって体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^3 \rho(x)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^3 (5x^2 + 10x + 325) dx \\ &= \frac{1040\pi}{3}. \end{aligned}$$

回転体の軸を含む平面で見た断面は、次のように上下が $\rho(x)$ と $-\rho(x)$ で囲まれる。



▶ 解法 2 (中点を原点にして奇関数部分を消す)

【方針】

点 P, Q は直線の別の媒介表示で求める。体積では区間 $[-1, 3]$ の中点 $x = 1$ を基準に $u = x - 1$ とおくと、半径の二乗の一次項が奇関数となり、対称区間で積分が消える。

【解答】

(1)

直線を

$$(1, 2, 9) + t(-4, 4, -2)$$

と表す。 P の y 座標が 0 だから

$$2 + 4t = 0,$$

よって

$$t = -\frac{1}{2}.$$

したがって

$$P = (3, 0, 10), \quad R = (3, 0, 0).$$

(2)

$$Q = (1 - 4t, 2 + 4t, 9 - 2t)$$

とすると

$$S = (1 - 4t, 0, 0)$$

である。ゆえに

$$\overrightarrow{SQ} = (0, 2 + 4t, 9 - 2t).$$

これと方向ベクトル $(-4, 4, -2)$ の内積を 0 とすると

$$4(2 + 4t) - 2(9 - 2t) = 0,$$

したがって

$$t = \frac{1}{2}.$$

よって

$$Q = (-1, 4, 8), \quad S = (-1, 0, 0).$$

(3)

解法 1 より

$$\rho(x)^2 = \frac{5x^2 + 10x + 325}{4}.$$

ここで

$$u = x - 1$$

とおくと、積分区間は $-2 \leq u \leq 2$ となり

$$\rho(x)^2 = 85 + 5u + \frac{5}{4}u^2.$$

したがって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 \left(85 + 5u + \frac{5}{4}u^2 \right) du \\ &= \pi \left(340 + \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{3} \right) \\ &= \frac{1040\pi}{3}. \end{aligned}$$

一次項 $5u$ は奇関数なので、対称区間での積分が 0 になる。

【総評】 難度 6、目安時間 20 分。PR の条件は P の y 座標を 0 にし、 QS の二つの垂直条件は S の座標と内積方程式を与える。体積では半径そのものではなく $y^2 + z^2$ を積分する。断面図で端面と回転半径を可視化し、別解では区間の中点まわりの対称性で計算を短縮した。

【第 5 問】

a を正の実数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$I_n = \int_0^1 x^{n+a-1} e^{-x} dx$$

と定める。

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$I_n \leq \frac{1}{n+a}$$

を示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$I_{n+1} - (n+a)I_n$$

を求めよ。

(3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$$

を求めよ。

(4) 実数 b, c に対して

$$J_n = n^3 \left(I_n + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。数列 $\{J_n\}$ が収束するとき、次の問いに答えよ。

(ア) b を求めよ。

(イ) c を a の式で表せ。

(ウ) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$$

を a の式で表せ。

▶ 解法 1 (部分積分を 3 段階まで反復する)

【方針】

(1) で基本評価、(2) で漸化式を作り、(3) は積分が $x = 1$ 付近へ集中することをはさみうちで示す。(4) では漸化式を 3 回反復し、 $1/n, 1/n^2, 1/n^3$ の係数を順に取り出す。

【解答】

(1)

$0 \leq x \leq 1$ では

$$0 < e^{-x} \leq 1.$$

したがって

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^{n+a-1} e^{-x} dx \\ &\leq \int_0^1 x^{n+a-1} dx \\ &= \frac{1}{n+a}. \end{aligned}$$

(2)

$$\frac{d}{dx} (x^{n+a} e^{-x}) = (n+a)x^{n+a-1} e^{-x} - x^{n+a} e^{-x}.$$

両辺を 0 から 1 まで積分すると

$$\frac{1}{e} = (n+a)I_n - I_{n+1}.$$

よって

$$I_{n+1} - (n+a)I_n = -\frac{1}{e}.$$

(3)

まず

$$e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

より

$$\frac{1}{e(n+a)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+a}.$$

上限を精密にするため、 $0 < \varepsilon < 1$ として積分区間を分ける。

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{1-\varepsilon} x^{n+a-1} e^{-x} dx + \int_{1-\varepsilon}^1 x^{n+a-1} e^{-x} dx \\ &\leq \int_0^{1-\varepsilon} x^{n+a-1} dx + e^{-1+\varepsilon} \int_{1-\varepsilon}^1 x^{n+a-1} dx. \end{aligned}$$

両辺を n 倍して $n \rightarrow \infty$ とすると、最初の積分は 0 へ収束し

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} nI_n \leq e^{-1+\varepsilon}.$$

一方、下の評価から

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} nI_n \geq \frac{1}{e}.$$

ε は任意だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{e}.$$

(4)

$E = 1/e$ 、 $N = n+a$ とおく。(2) を変形すると

$$I_n = \frac{E}{N} + \frac{I_{n+1}}{N}.$$

これを 3 段階まで反復して

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{E}{N} + \frac{E}{N(N+1)} + \frac{E}{N(N+1)(N+2)} \\ &\quad + \frac{I_{n+3}}{N(N+1)(N+2)} \end{aligned}$$

を得る。(1) から

$$0 \leq I_{n+3} \leq \frac{1}{n+a+3}$$

なので、最後の項は n^3 倍しても 0 へ収束する。

まず (3) より $nI_n \rightarrow E$ だから、 J_n が収束するには

$$b = -E = -\frac{1}{e}$$

が必要である。

次に上の表示から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(I_n - \frac{E}{n} \right) = (1-a)E.$$

したがって二次の発散も消すには

$$c = (a-1)E = \frac{a-1}{e}$$

が必要である。

この b, c に対して

$$J_n = n^3 \left(I_n - \frac{E}{n} + \frac{(a-1)E}{n^2} \right).$$

3 項の表示を使うと

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n} + \frac{a}{n^2} \right) &= a^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{N(N+1)} - \frac{1}{n^2} \right) &= -(2a+1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{N(N+1)(N+2)} &= 1. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} J_n &= E\{a^2 - (2a+1) + 1\} \\ &= \frac{a(a-2)}{e}. \end{aligned}$$

以上より

$$b = -\frac{1}{e}, \quad c = \frac{a-1}{e}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{a(a-2)}{e}.$$

▶ 解法 2 (漸化式から補正項を段階的に決める)

【方針】

(1)~(3) で得た評価と漸化式を使い、まず I_n の $1/n$ 項、次に $1/n^2$ 項を極限として決める。その情報を漸化式へもう一度代入し、 $1/n^3$ 項を得る。

【解答】

(1)

$e^{-x} \leq 1$ より

$$I_n \leq \int_0^1 x^{n+a-1} dx = \frac{1}{n+a}.$$

(2)

部分積分すると

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+a} e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+a)I_n. \end{aligned}$$

よって

$$I_{n+1} - (n+a)I_n = -\frac{1}{e}.$$

(3)

解法 1 のはさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{e}.$$

(4)

$$E = \frac{1}{e}$$

とおく。漸化式を

$$I_n = \frac{E + I_{n+1}}{n+a}$$

と書く。

まず

$$n^2 \left(I_n - \frac{E}{n} \right) = \frac{n\{nI_{n+1} - aE\}}{n+a}.$$

ここで

$$nI_{n+1} = \frac{n}{n+1} \{(n+1)I_{n+1}\} \rightarrow E$$

だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(I_n - \frac{E}{n} \right) = (1-a)E.$$

この極限との差を

$$R_n = n^2 \left(I_n - \frac{E}{n} \right) - (1-a)E$$

とおけば $R_n \rightarrow 0$ であり、

$$I_{n+1} = \frac{E}{n+1} + \frac{(1-a)E}{(n+1)^2} + \frac{R_{n+1}}{(n+1)^2}$$

と正確に書ける。これを漸化式へ代入すると

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{E}{n+a} + \frac{E}{(n+a)(n+1)} \\ &\quad + \frac{(1-a)E}{(n+a)(n+1)^2} + \frac{R_{n+1}}{(n+a)(n+1)^2}. \end{aligned}$$

J_n が収束するには、まず $nI_n \rightarrow E$ より

$$b = -E = -\frac{1}{e}$$

が必要である。さらに先ほどの極限より

$$c = -(1-a)E = \frac{a-1}{e}$$

が必要である。

この b, c を代入する。上の正確な表示に対して

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n} + \frac{a}{n^2} \right) &= a^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{(n+a)(n+1)} - \frac{1}{n^2} \right) &= -(a+1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+a)(n+1)^2} &= 1 \end{aligned}$$

である。また $R_{n+1} \rightarrow 0$ だから、剰余項を n^3 倍したものも 0 へ収束する。したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} J_n &= E\{a^2 - (a+1) + (1-a)\} \\ &= a(a-2)E = \frac{a(a-2)}{e}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 8、目安時間 32 分。(1)(2) は後半のための評価と漸化式である。(3) では積分への寄与が $x=1$ 近くへ集中することを、固定した ε で区間分割して示す。(4) は $1/n, 1/n^2, 1/n^3$ の係数を順に消す問題で、反復部分積分による厳密な剰余評価と、漸化式による段階的な係数決定を相互検算できる。