

横浜国立大学 2024 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^{3x} + 4e^{2x} + e^x}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} dx$$

を求めよ。

▶ 解法 1：指数置換して有理関数を積分

【方針】

$u = e^x$ において積分区間を変換する。分母を $(u^2 + 1)^2$ と見て、被積分関数を三角置換する項と分母の微分で積分できる項に分ける。

【解答】

(1) $u = e^x$ とおくと、 $dx = du/u$ であり、 $x = 0, \log \sqrt{3}$ はそれぞれ $u = 1, \sqrt{3}$ に対応する。したがって

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2 + 4u + 1}{(u^2 + 1)^2} du = \int_1^{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{u^2 + 1} + \frac{4u}{(u^2 + 1)^2} \right\} du$$

である。

第 1 項で $u = \tan \theta$ とおけば、 θ は $\pi/4$ から $\pi/3$ まで動き、

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2 + 1} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta = \frac{\pi}{12}$$

となる。また、

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4u}{(u^2 + 1)^2} du = \left[-\frac{2}{u^2 + 1} \right]_1^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

である。ゆえに

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}$$

である。

▶ 解法 2：被積分関数を微分形として読む

【方針】

元の x のまま 2 項に分ける。一方を $\tan \theta = e^x$ で定めた角の微分、他方を分数関数の微分として認識し、端点だけを代入する。

【解答】

(1) 分母は $(1 + e^{2x})^2$ であるから、被積分関数は

$$\frac{e^x}{1 + e^{2x}} + \frac{4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$$

と分けられる。

$0 \leq x \leq \log \sqrt{3}$ で

$$\tan \theta(x) = e^x, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{\pi}{3}$$

と定める。両辺を微分すると

$$\theta'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

である。一方、

$$\left(\frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right)' = \frac{4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$$

である。したがって

$$I = \left[\theta(x) + \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right]_0^{\log \sqrt{3}}.$$

角の差は $\pi/3 - \pi/4 = \pi/12$ 、分数部分の差は

$$\frac{2 \cdot 3}{1 + 3} - \frac{2}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

なので、

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}$$

を得る。

【総評】 難度 4、計算量 4。指数置換後に分母が $(1 + u^2)^2$ となることを見抜く標準的な積分である。第一解法は答案として安定し、第二解法は微分形の発見を示す。端点 $1, \sqrt{3}$ と角 $\pi/4, \pi/3$ 、第 2 項の符号を必ず確認したい。両解法で $\pi/12 + 1/2$ が一致する。

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(2) 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ が、すべての実数 x に対して $f(x) > 0$, かつ

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{(t^2 + 1)f(t)} dt + 1$$

をみたすとき、 $f(x)$ を求めよ。

▶ 解法 1：積分方程式を微分して初期値問題にする

【方針】

正値性により被積分関数が連続であることを確認して両辺を微分する。 $2ff'$ の形を作って f^2 を求め、 $f(0) = 1$ と正値性で平方根の枝を決める。

【解答】

(2) 与式に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 1$$

である。 f は連続かつ正であるから被積分関数も連続であり、微積分の基本定理により

$$f'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)f(x)}$$

と微分できる。よって

$$\{f(x)^2\}' = 2f(x)f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

0 から x まで積分して

$$f(x)^2 - f(0)^2 = \log(x^2 + 1)$$

を得る。したがって

$$f(x)^2 = 1 + \log(x^2 + 1).$$

右辺はすべての実数 x で 1 以上であり、条件 $f(x) > 0$ から

$$f(x) = \sqrt{1 + \log(x^2 + 1)}$$

である。

実際、この関数では

$$\int_0^x \frac{t}{(t^2 + 1)\sqrt{1 + \log(t^2 + 1)}} dt = \sqrt{1 + \log(x^2 + 1)} - 1$$

となるため、元の積分方程式も満たす。

▶ 解法 2：積分で増えた量を未知関数にする

【方針】

右辺の積分そのものを $F(x)$ とおくと $f = F + 1$ である。 F' の式に $f = F + 1$ を代入し、 $(F + 1)F'$ を直接積分する。

【解答】

(2)

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{(t^2 + 1)f(t)} dt$$

とおく。与式から

$$f(x) = F(x) + 1, \quad F(0) = 0$$

である。正値性より $F(x) + 1 = f(x) > 0$ であり、

$$F'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)(F(x) + 1)}$$

となる。したがって

$$(F(x) + 1)F'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

両辺を 0 から x まで積分すると

$$\left[\frac{1}{2}(F(t) + 1)^2 \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1),$$

すなわち

$$(F(x) + 1)^2 = 1 + \log(x^2 + 1)$$

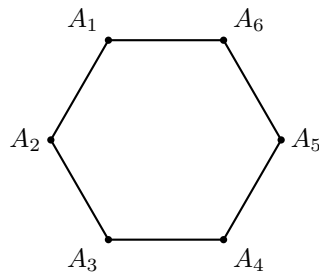
である。 $F + 1 = f > 0$ であるから、

$$f(x) = F(x) + 1 = \sqrt{1 + \log(x^2 + 1)}$$

となる。この方法では、積分方程式の右辺が作る累積量を先に未知関数としている。

【総評】 難度 5、計算量 4。積分方程式を初期値つき微分方程式へ移す問題である。連続性と正値性が、微分可能性、分母が 0 でないこと、平方根の正の枝の 3 点に使われる。候補を得ただけで終わらず、置換積分で元の方程式へ戻して確認すると解の存在まで明確になる。

【第 2 問】



1 辺の長さが 1 の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ がある。

1 個のさいころを続けて 5 回投げ、出た目を順に n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 とおく。次の条件付き確率をそれぞれ求めよ。

- (1) 「 n_1, n_2, n_3 がすべて異なる」という条件のもとで、「三角形 $A_{n_1}A_{n_2}A_{n_3}$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である」という条件付き確率
- (2) 「 n_1, n_2, n_3 がすべて異なり、かつ $n_4 \neq n_5$ である」という条件のもとで、「線分 $A_{n_4}A_{n_5}$ が三角形 $A_{n_1}A_{n_2}A_{n_3}$ の面積を 2 等分する」という条件付き確率

▶ 解法 1：円周上の間隔で三角形を分類

【方針】

3 頂点間の円周上の間隔を、和が 6 となる 3 つの正整数で分類する。(2) では回転で同一視した 4 種類の三角形について、面積を二等分する直径を表にして数える。

【解答】

(1) 異なる 3 頂点を円周に沿って並べ、その間の辺の本数を p, q, r とすると

$$p + q + r = 6, \quad p, q, r \geq 1$$

である。順序を除いた型、個数、面積は

間隔の型	三角形の個数	面積
(1, 1, 4)	6	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
(1, 2, 3)	12	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
(2, 2, 2)	2	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

となる。例えば (1, 2, 3) 型は、辺の長さが $1, \sqrt{3}, 2$ の直角三角形である。したがって、面積が $\sqrt{3}/2$ となる三角形は 12 個である。

条件のもとで (n_1, n_2, n_3) は $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ 通りであり、1 つの三角形につき頂点の順序は $3! = 6$ 通りある。よって

$$\frac{12 \cdot 6}{120} = \frac{3}{5}$$

である。

(2) まず三角形と線分の向きを無視する。20 個の三角形は回転によって次の 4 型に分かれる。表中の線分はいずれも直径で、三角形の 1 頂点とその対辺の中点を通るため面積を二等分する。

代表三角形	同型の個数	代表となる二等分線分	1 三角形当たりの本数
$A_1 A_2 A_3$	6	$A_2 A_5$	1
$A_1 A_2 A_4$	6	$A_2 A_5$	1
$A_1 A_2 A_5$	6	$A_1 A_4$	1
$A_1 A_3 A_5$	2	$A_1 A_4, A_2 A_5, A_3 A_6$	3

各代表について残りの頂点間線分も調べると、表に挙げたもの以外は二等分しない。したがって、向きを無視した有利な組は

$$6 + 6 + 6 + 2 \cdot 3 = 24$$

組である。

全体は、三角形が ${}_6C_3 = 20$ 通り、異なる 2 頂点を結ぶ線分が ${}_6C_2 = 15$ 通りである。頂点の順序 $3!$ と線分の向き 2 通りは分子・分母で共通に掛かるので、

$$\frac{24}{20 \cdot 15} = \frac{2}{25}$$

となる。

▶ 解法 2：座標と回転軌道で全候補を検査

【方針】

正六角形を単位円上に座標化する。三角形の面積は行列式で、線分による二等分は交点が対辺の中点になるかで判定し、回転軌道ごとに候補を整理する。

【解答】

(1) 中心を原点とし、

$$A_j = \left(\cos \frac{(j-1)\pi}{3}, \sin \frac{(j-1)\pi}{3} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

とおく。この正六角形の 1 辺は 1 である。異なる 3 点 X, Y, Z について

$$\frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}) \right|$$

を計算すると、20 個の三角形は

$$\text{面積 } \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{がそれぞれ } 6, 12, 2 \text{ 個}$$

となる。よって

$$\frac{12}{{}_6C_3} = \frac{3}{5}.$$

(2) 同じ座標で 20 三角形と 15 本の頂点間線分を調べる。回転軌道の代表、軌道の大きさ、1 三角形を二等分する線分数は

代表	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2, 5\}$	$\{1, 3, 5\}$
大きさ	6	6	6	2
本数	1	1	1	3

である。前 3 型ではそれぞれ直径 A_2A_5, A_2A_5, A_1A_4 が 1 頂点と対辺の中点を通り、最後の正三角形では 3 本の直径が中線となる。座標の平均を取るとこれら以外の線分は中点を通らない。したがって有利な無向の組は

$$6 + 6 + 6 + 2 \cdot 3 = 24$$

組、全体は ${}_6C_3 {}_6C_2 = 20 \cdot 15$ 組なので

$$\frac{24}{20 \cdot 15} = \frac{2}{25}.$$

【総評】 難度 6、計算量 6。順序つきの出目を直接数えるより、まず三角形と線分を無向にして回転対称性で分類するのが安全である。(2) では「非正三角形は 1 本、交互頂点の正三角形は 3 本」という結論だけで済ませず、4 つの回転軌道を表で尽くした。座標による全 20 三角形・15 線分の確認でも確率 $2/25$ が一致する。

【第 3 問】

四面体 $OABC$ において、点 P, Q, R は、それぞれ辺 OA, OB, OC を $1:1, 2:1, 3:1$ の比に内分する。点 C と $\triangle PQR$ の重心 G を通る直線が平面 OAB と交わる点を H とする。ベクトル $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{OH}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ。

さらに、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3, \vec{a} \cdot \vec{c} = 1, \vec{b} \cdot \vec{c} = 9, |\vec{c}| = \sqrt{3}$ であり、直線 CH が平面 OAB に直交しているとする。

(2) $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ を求めよ。

(3) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

▶ 解法 1：直線の媒介表示と底面・高さ

【方針】

P, Q, R と重心 G の位置ベクトルを求め、直線 CG を媒介表示して H を出す。垂直条件を 2 本の内積方程式にし、底面積と高さから体積を求める。

【解答】

(1) 内分比と重心の公式から

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \vec{OR} = \frac{3}{4}\vec{c}$$

であり、

$$\vec{OG} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c} \right) = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

である。直線 CG 上の点の位置ベクトルは

$$\vec{c} + t \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{c} \right)$$

と表せる。平面 OAB 上では $\vec{c}$ の係数が 0 なので

$$1 - \frac{3}{4}t = 0, \quad t = \frac{4}{3}.$$

したがって

$$\vec{OH} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{8}{27}\vec{b}$$

である。

(2)

$$\vec{CH} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{8}{27}\vec{b} - \vec{c}.$$

これが平面 OAB に垂直であるから、 $\vec{a}, \vec{b}$ との内積がともに 0 である。よって

$$\frac{2}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{8}{27} \cdot 3 - 1 = 0, \quad \frac{2}{9} \cdot 3 + \frac{8}{27}|\vec{b}|^2 - 9 = 0.$$

これらを解くと

$$|\vec{a}|^2 = \frac{1}{2}, \quad |\vec{b}|^2 = \frac{225}{8},$$

したがって

$$|\vec{a}| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |\vec{b}| = \frac{15}{2\sqrt{2}}$$

である。

(3) $\triangle OAB$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{225}{8} - 9} = \frac{9}{8}.$$

(4) H は C から平面 OAB へ下ろした垂線の足である。内積を展開すると

$$\begin{aligned} |CH|^2 &= \left| \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{8}{27}\vec{b} - \vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

よって高さは $1/3$ である。したがって四面体の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

である。

▶ 解法 2：射影とグラム行列

【方針】

H を C の平面 OAB への正射影と見る。射影係数から長さを決め、面積と体積はそれぞれ 2 次・3 次のグラム行列式で一括して計算する。

【解答】

(1)

$$\vec{g} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}.$$

C から G へ割合 t だけ進んだ点は $(1-t)\vec{c} + t\vec{g}$ である。平面 OAB 上では $\vec{c}$ の係数が 0 だから $t = 4/3$ となり、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{8}{27}\vec{b}.$$

(2) H は C の平面 OAB への正射影である。 $A = |\vec{a}|^2$, $B = |\vec{b}|^2$ とおくと

$$\begin{aligned} 1 &= \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{2}{9}A + \frac{8}{27} \cdot 3, \\ 9 &= \vec{c} \cdot \vec{b} = \frac{2}{9} \cdot 3 + \frac{8}{27}B. \end{aligned}$$

よって

$$|\vec{a}| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |\vec{b}| = \frac{15}{2\sqrt{2}}.$$

(3)

$$[\triangle OAB] = \frac{1}{2} \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1/2 & 3 \\ 3 & 225/8 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{8}.$$

(4) 3 本のベクトルのグラム行列式は

$$\det \begin{pmatrix} 1/2 & 3 & 1 \\ 3 & 225/8 & 9 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \frac{9}{16}.$$

したがって平行六面体の体積は $3/4$ 、四面体の体積は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 6。前半は内分点と重心の位置ベクトル、後半は正射影とグラム行列が中心である。直線 CG の媒介係数 $4/3$ は線分の外に出ても問題ない。面積 $9/8$ 、高さ $1/3$ 、体積 $1/8$ を底面・高さ と 3 次グラム行列式の 2 通りで相互確認した。

【第 4 問】

α を、 $|\alpha| < 1$ をみたす複素数とする。 $\bar{\alpha}z \neq 1$ となる複素数 z に対して、

$$w = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$$

と定める。ただし、 $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。次の問いに答えよ。

- (1) z が $|z| = \frac{1}{3}$ をみたしながら動くとき、 w の描く図形 D を求め、 $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき、 D を複素数平面に図示せよ。
- (2) α が $|\alpha| = \frac{1}{2}$ をみたしながら動くとき、(1) で求めた図形 D が通過する範囲 E を求め、 E を複素数平面に図示せよ。

▶ 解法 1：逆変換して円の方程式を平方完成

【方針】

変換式を z について解き、 $|z| = 1/3$ を w の絶対値方程式へ移す。展開・平方完成で中心と半径を出し、中心円と固定半径から通過範囲を求める。

【解答】

(1) 変換式を z について解くと

$$z = \frac{\alpha - w}{1 - \bar{\alpha}w}$$

である。したがって $|z| = 1/3$ は

$$9|w - \alpha|^2 = |1 - \bar{\alpha}w|^2$$

と同値である。両辺を展開すると

$$(9 - |\alpha|^2)|w|^2 - 8(\bar{\alpha}w + \alpha\bar{w}) + 9|\alpha|^2 - 1 = 0.$$

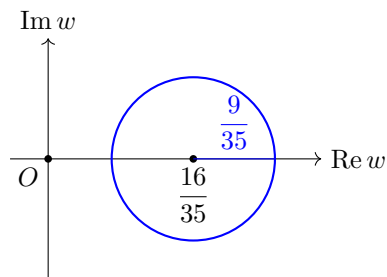
$|\alpha| < 1$ なので $9 - |\alpha|^2 > 0$ であり、平方完成して

$$\left| w - \frac{8\alpha}{9 - |\alpha|^2} \right| = \frac{3(1 - |\alpha|^2)}{9 - |\alpha|^2}$$

を得る。よって D はこの中心と半径をもつ円周である。

$\alpha = 1/2$ では

$$\text{中心} = \frac{16}{35}, \quad \text{半径} = \frac{9}{35}.$$



(2) $|\alpha| = 1/2$ のとき、 D の中心は原点中心、半径 $16/35$ の円周上を動き、 D 自身の半径は常に $9/35$ である。中心を M とすると、 $w \in D$ であるための条件は

$$|M| = \frac{16}{35}, \quad |w - M| = \frac{9}{35}.$$

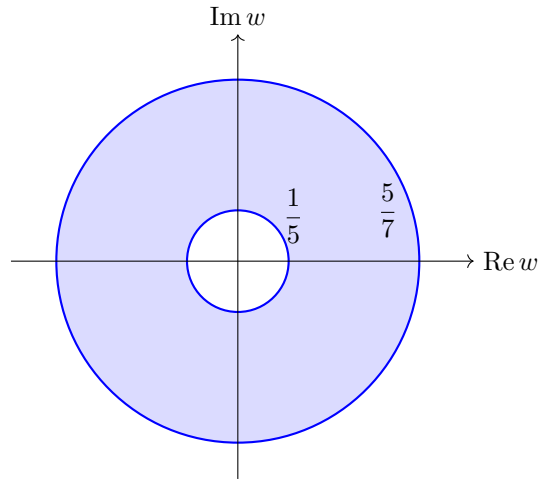
三角形の成立条件から

$$\frac{16}{35} - \frac{9}{35} \leq |w| \leq \frac{16}{35} + \frac{9}{35},$$

すなわち

$$\frac{1}{5} \leq |w| \leq \frac{5}{7}.$$

逆にこの範囲の任意の w について、辺長 $|w|, 16/35, 9/35$ の三角形が作れるので、条件を満たす中心 M が存在する。したがって E は境界を含む環状領域である。



▶ 解法 2：アポロニウスの円として捉える

【方針】

$\alpha \neq 0$ では $|1 - \bar{\alpha}w| = |\alpha||w - 1/\bar{\alpha}|$ を使い、 D を 2 定点からの距離比が一定のアポロニウスの円と見る。後半は三角不等式で円周の合併を決める。

【解答】

(1) $\rho = |\alpha|$ とする。まず $\alpha \neq 0$ の場合、

$$|w - \alpha| = \frac{1}{3}|1 - \bar{\alpha}w| = \frac{\rho}{3} \left| w - \frac{1}{\bar{\alpha}} \right|.$$

これは 2 点 $\alpha, 1/\bar{\alpha}$ からの距離の比が $\rho : 3$ である点の軌跡、すなわちアポロニウスの円である。距離比を $q = \rho/3$ とすると、その中心は

$$\frac{\alpha - q^2/\bar{\alpha}}{1 - q^2} = \frac{8\alpha}{9 - \rho^2},$$

半径は

$$\frac{q|\alpha - 1/\bar{\alpha}|}{1 - q^2} = \frac{3(1 - \rho^2)}{9 - \rho^2}.$$

$\alpha = 0$ の場合も元の式から $w = -z$ なので $|w| = 1/3$ となり、同じ公式に含まれる。

$\alpha = 1/2$ では中心 $16/35$ 、半径 $9/35$ の円周である。

(2) $|\alpha| = 1/2$ では中心 M が $|M| = 16/35$ を動き、各円周は $|w - M| = 9/35$ である。三角不等式と逆向きの三角不等式から

$$||M| - |w - M|| \leq |w| \leq |M| + |w - M|,$$

よって

$$\frac{1}{5} \leq |w| \leq \frac{5}{7}.$$

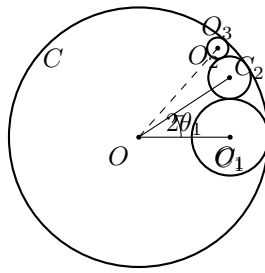
また、この範囲では $|w|, 16/35, 9/35$ が三角形の 3 辺となるので、 w を固定したとき条件を満たす M を選べる。したがって通過範囲は

$$E = \left\{ w \mid \frac{1}{5} \leq |w| \leq \frac{5}{7} \right\}$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 7。分数変換を逆に解いて絶対値方程式へ直すのが主眼である。平方完成では $\bar{\alpha}w + \alpha\bar{w}$ の係数を落とさないこと、通過範囲では円周の合併が境界を含む環状領域になることが重要である。代数解とアポロニウス円の解で中心・半径を照合し、図示も数値比に合わせた。

【第 5 問】



xy 平面上に、原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。さらに、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、中心 O_n 、半径 r_n の円 C_n があり、以下の (i), (ii), (iii) をみたす。

(i) 点 O_1 の座標は $(1 - r_1, 0)$ であり、かつ $r_1 < 1$ である。

(ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 C_{n+1} は C に内接し、 C_{n+1} と C_n は外接する。

(iii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、半直線 OO_{n+1} は、 O を中心として半直線 OO_n を時計の針の回転と逆向きに $2\theta_n$ 回転したものであり、 $0 < 2\theta_n < \pi$ である。

次の問いに答えよ。

(1) $\sin^2 \theta_1$ を r_1, r_2 の式で表せ。

以下、 $r_n = \frac{1}{2^{n+1} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\sin \theta_n$ を n の式で表せ。

(3) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ に対して、

$$\sin x < x < \sin x + \frac{1}{5} \sin^3 x$$

を示せ。必要ならば、 $3.14 < \pi < 3.15$ を用いてよい。

(4) 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \theta_k$ は存在し、その極限値を α とおく。 α の小数第 2 位まで（小数第 3 位切り捨て）を求めよ。必要ならば、 $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ を用いてよい。

▶ 解法 1：余弦定理と微分による不等式

【方針】

接する 3 円の中心が作る三角形に余弦定理を用いる。指定半径では $\sin \theta_n$ が等比数列になる。(3) を微分で証明し、その評価を各 θ_n へ適用して無限和を挟む。

【解答】

(1)

$$OO_1 = 1 - r_1, \quad OO_2 = 1 - r_2, \quad O_1O_2 = r_1 + r_2$$

であり、 $\angle O_1OO_2 = 2\theta_1$ である。余弦定理より

$$(r_1 + r_2)^2 = (1 - r_1)^2 + (1 - r_2)^2 - 2(1 - r_1)(1 - r_2) \cos 2\theta_1.$$

$\cos 2\theta_1 = 1 - 2\sin^2 \theta_1$ を代入して整理すると

$$\sin^2 \theta_1 = \frac{r_1 r_2}{(1 - r_1)(1 - r_2)}$$

である。

(2) 同じ計算を C_n, C_{n+1} に行うと

$$\sin^2 \theta_n = \frac{r_n r_{n+1}}{(1 - r_n)(1 - r_{n+1})}.$$

ここで

$$\frac{r_n}{1 - r_n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

だから

$$\sin^2 \theta_n = \frac{1}{2^{2n+3}}.$$

$0 < \theta_n < \pi/2$ より

$$\sin \theta_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2}}$$

である。

(3) $x - \sin x$ の導関数は $1 - \cos x > 0$ なので

$$\sin x < x$$

である。次に

$$g(x) = \sin x + \frac{1}{5} \sin^3 x - x$$

とおくと

$$g'(x) = \frac{(1 - \cos x)(3 \cos^2 x + 3 \cos x - 5)}{5}.$$

$3u^2 + 3u - 5$ は $u > 0$ で単調増加し、 $\cos x$ は単調減少するから、 g' の符号は区間内で高々 1 回、正から負へ変わる。よって g の最小値は端点で取られる。

$$g(0) = 0, \quad g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{40} - \frac{\pi}{6} > 0$$

であり、最後は $\pi < 3.15$ から従う。したがって $0 < x < \pi/6$ で

$$x < \sin x + \frac{1}{5} \sin^3 x$$

である。

(4) $\sin \theta_1 = 1/(4\sqrt{2}) < 1/2$ で、 $\sin \theta_n$ は減少するため、すべての θ_n に (3) を適用できる。各項が正なので部分和は増加し、また

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \theta_k + \frac{1}{5} \sin^3 \theta_k \right)$$

の右辺は収束する。よって極限 α は存在する。

等比級数を計算すると

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \theta_k = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5} \sin^3 \theta_k = \frac{\sqrt{2}}{1120}.$$

したがって

$$\frac{\sqrt{2}}{4} < \alpha < \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{1120}.$$

$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ より

$$0.3525 < \alpha < 0.3563.$$

この区間の数はすべて小数第 3 位を切り捨てると

$$0.35$$

となる。

▶ 解法 2：半角公式と積分評価

【方針】

中心三角形の半周長が 1 になることに注目し、三角形の半角公式で $\sin^2 \theta_n$ を直接出す。(3) は積分評価と $\sin x$ の凹性で示し、同じはさみうちへつなげる。

【解答】

(1) $\triangle OO_1O_2$ の 3 辺は

$$1 - r_1, \quad 1 - r_2, \quad r_1 + r_2$$

で、その和は 2、したがって半周長は 1 である。角 $2\theta_1$ は最初の 2 辺の間の角なので、三角形の半角公式から

$$\sin^2 \theta_1 = \frac{\{1 - (1 - r_1)\}\{1 - (1 - r_2)\}}{(1 - r_1)(1 - r_2)} = \frac{r_1 r_2}{(1 - r_1)(1 - r_2)}.$$

(2) 同様に

$$\sin^2 \theta_n = \frac{r_n}{1 - r_n} \frac{r_{n+1}}{1 - r_{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+2}}.$$

θ_n は鋭角なので

$$\sin \theta_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2}}.$$

(3)

$$x - \sin x = \int_0^x (1 - \cos t) dt = \int_0^x 2 \sin^2 \frac{t}{2} dt < \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = \frac{x^3}{6},$$

ここで $\sin(t/2) < t/2$ を用いた。一方、 $\sin x$ は $[0, \pi/6]$ で上に凸なので、グラフは両端を結ぶ弦より上にあり、

$$\sin x > \frac{\sin(\pi/6)}{\pi/6} x = \frac{3}{\pi} x.$$

$\pi < 3.15$ から

$$5\pi^3 < 5(3.15)^3 < 162$$

である。よって

$$\frac{x^3}{6} < \frac{1}{5} \left(\frac{3x}{\pi} \right)^3 < \frac{1}{5} \sin^3 x.$$

以上より

$$\sin x < x < \sin x + \frac{1}{5} \sin^3 x.$$

(4) $\sin \theta_k = 1/(2^{k+1}\sqrt{2})$ であり、 $\theta_k < \pi/6$ だから (3) より

$$\sum_{k=1}^n \sin \theta_k < \sum_{k=1}^n \theta_k < \sum_{k=1}^n \sin \theta_k + \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \sin^3 \theta_k.$$

左右はそれぞれ収束する等比級数であるため、中央の増加列も上に有界で収束する。極限を取ると

$$\frac{\sqrt{2}}{4} < \alpha < \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{1120}.$$

$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ を代入すれば

$$0.3525 < \alpha < 0.3563$$

となるので、指定された値は

$$0.35$$

である。

【総評】 難度 8、計算量 8。接する円の幾何、三角不等式、無限級数の評価をつなぐ総合問題である。中心三角形の半周長が 1 という観察は半角公式による短い別解になる。(3) は微分による符号変化と積分・凹性の 2 通りで証明し、(4) では全 $\theta_k < \pi/6$ 、部分和の単調性と上界を明記した。数値区間全体が切り捨て後 0.35 となる。