

横浜国立大学 2025 年度 文系

解答

全 3 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

中身の見えない箱が 1 つあり、その中に白いカードが 4 枚、黒いカードが 3 枚入っている。

以下の操作 I から IV を順に一度ずつ行う。

操作 I 箱からカードを無作為に 1 枚取り出し、手元に置く。

操作 II 箱からカードを無作為に 1 枚取り出し、手元に置く。

操作 III 箱からカードを無作為に 1 枚取り出し、手元に置き、操作 I で取り出したカードを箱の中に戻す。

操作 IV 箱からカードを無作為に 1 枚取り出し、手元に置き、操作 III で取り出したカードを箱の中に戻す。

例えば、操作 I, II, III, IV で白, 黒, 黒, 白の順でカードが取り出されたとする。箱の中に入っているカードの枚数を

$$\begin{pmatrix} \text{白いカードの枚数} \\ \text{黒いカードの枚数} \end{pmatrix}$$

で表すとき、箱の中は

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

のように変化してゆく。

次の問いに答えよ。

- (1) 操作 III を終えたときに箱の中に入っている白いカードの枚数が 3 である確率を求めよ。
- (2) 操作 III を終えたときに箱の中に入っている白いカードの枚数と、操作 IV を終えたときに箱の中に入っている黒いカードの枚数が同じである確率を求めよ。
- (3) 操作 IV を終えたときに箱の中に入っている白いカードの枚数が 4 であったという条件のもとで、操作 III を終えたときに箱の中に入っている白いカードの枚数が 3 である条件付き確率を求めよ。

【方針】

操作 I から IV で取り出したカードの色を順に X_1, X_2, X_3, X_4 とする。操作 III 後の白枚数は、操作 II と操作 III で取り出した色だけで決まる。操作 IV 後の枚数まで必要な小問では、白黒の列を必要最小限に分け、それぞれの確率を掛け合わせる。

【解答】

(1) 操作 I から IV で取り出したカードの色を順に X_1, X_2, X_3, X_4 とする。操作 III 後には、操作 II と操作 III で白を取り出した回数だけ箱の中の白いカードが減っている。したがって、操作 III 後の白いカードの枚数が 3 であるのは、 X_2, X_3 のうち一方だけが白である場合である。

$$P(X_2 = \text{白}, X_3 = \text{黒}) = \frac{2}{7}, \quad P(X_2 = \text{黒}, X_3 = \text{白}) = \frac{2}{7}$$

より、求める確率は

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

である。

(2) 白を W 、黒を B で表す。条件を満たす取り出し順は、確率が 0 でないもののうち

$$WWWB, \quad WWBW, \quad BWWB, \quad BWBW$$

である。それぞれの確率は

$$\frac{12}{175}, \quad \frac{18}{175}, \quad \frac{18}{175}, \quad \frac{12}{175}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{12 + 18 + 18 + 12}{175} = \frac{12}{35}$$

である。

(3) 操作 IV 後の白いカードの枚数が 4 である取り出し順は

$$WBWB, \quad WBBB, \quad BBWB, \quad BBBB$$

であり, その確率の和は

$$\frac{12+4+8+1}{175} = \frac{1}{7}$$

である。このうち操作 III 後の白いカードの枚数が 3 であるのは $WBWB, BBWB$ で, 確率の和は

$$\frac{12+8}{175} = \frac{4}{35}$$

である。よって条件付き確率は

$$\frac{4/35}{1/7} = \frac{4}{5}$$

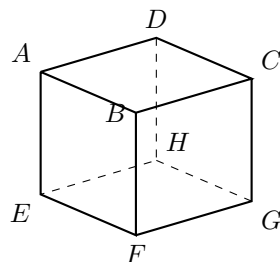
である。

【総評】 【公式解答・出題意図との照合】 公式解答例の 3 値 $4/7, 12/35, 4/5$ と全て一致する。

難度 5, 計算量 5. 想定時間は 15 分程度。操作 III と IV で戻すカードが異なる点を状態として正しく追うことが得点の中心である。全列挙に寄せすぎると計算が重くなるため, 必要な色列だけを取り出して確率を足す整理が有効である。

【独立検算】 4 操作の全ての色列を分数で全列挙し, 3 つの確率を再計算した。

【第 2 問】



立方体 $ABCD-EFGH$ を考える。辺 AD, GH の中点をそれぞれ P, Q とする。辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を R とする。ただし, $0 < t < 1$ である。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ と表す。いま, 4 点 B, C, G, F を通る平面上に点 S をとり,

$$\overrightarrow{AS} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

(α, β, γ は実数) と表す。

次の問いに答えよ。

(1) α を求めよ。また, $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AR}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, t$ を用いて表せ。

以降, P, Q, R, S が同一平面上にあるとする。

(2) β を γ, t の式で表せ。

(3) 直線 PS と直線 QR が垂直に交わるとき, β, γ をそれぞれ t の式で表せ。

(4) 直線 PS と直線 QR が垂直に交わり, かつ点 S が立方体の面 $BCGF$ 上にあるとき, t の取りうる値の範囲を求めよ。

【方針】

立方体の 3 辺を基底ベクトルとして座標化する。 P, Q, R, S の成分を並べ, P, Q, R, S が同一平面上にある条件を, $\overrightarrow{PS} = u\overrightarrow{PQ} + v\overrightarrow{PR}$ において係数比較する。垂直条件は内積で処理し, 最後に面 $BCGF$ 上の条件 $0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \gamma \leq 1$ を調べる。

【解答】

(1) 点 S は面 $BCGF$ 上にあるので, $\vec{a}$ 方向の係数は 1 であり,

$$\alpha = 1$$

である。また,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{AR} = t\vec{a}$$

である。

(2) P, Q, R, S が同一平面上にあるから, 実数 u, v を用いて

$$\overrightarrow{PS} = u\overrightarrow{PQ} + v\overrightarrow{PR}$$

と表せる。各ベクトルの成分は

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{PR} = t\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{PS} = \vec{a} + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

である。 $\vec{c}$ の係数から $u = \gamma$, $\vec{a}$ の係数から $1 = \gamma/2 + tv$, したがって $v = (1 - \gamma/2)/t$ である。 $\vec{b}$ の係数を比較すると

$$\beta - \frac{1}{2} = \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \gamma/2}{t}$$

より,

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t} + \frac{2t+1}{4t}\gamma$$

である。

(3) 立方体の 3 辺方向は互いに垂直である。直線 PS と直線 QR が垂直である条件は

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$$

である。ここで

$$\overrightarrow{QR} = \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

だから, 内積は

$$t - \beta - \gamma = 0$$

となる。したがって $\beta + \gamma = t$ である。これと (2) の式を連立して,

$$\gamma = \frac{4t^2 - 2t + 2}{6t + 1}, \quad \beta = \frac{2t^2 + 3t - 2}{6t + 1}$$

を得る。

(4) 点 S が面 $BCGF$ 上にあるためには

$$0 \leq \beta \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$

が必要十分である。 $0 < t < 1$ では $6t + 1 > 0$ であり,

$$\beta \geq 0 \iff 2t^2 + 3t - 2 \geq 0 \iff t \geq \frac{1}{2}$$

である。また $\beta \leq 1$ はこの範囲で成り立つ。さらに $\gamma \geq 0$ は常に成り立ち,

$$\gamma \leq 1 \iff 4t^2 - 8t + 1 \leq 0$$

であるが, $t \geq 1/2$ ならこれも満たされる。よって

$$\frac{1}{2} \leq t < 1$$

である。

【総評】 【公式解答・出題意図との照合】 本問は文系第 2 問・理系第 3 問の共通問題である。公式解答例の α, β, γ と $1/2 \leq t < 1$ に全て一致する。

難度 6, 計算量 6。想定時間は 20 分程度。立方体を 3 つの基本ベクトルで座標化すれば標準的に処理できる。採点上は同一平面条件の係数比較, 垂直条件の内積, 面上にあるための範囲条件を順に落とさないことが重要である。

【独立検算】 複数の有理数 t で, P, Q, R, S の共面条件を行列式, 垂直条件を内積で独立に検算し, $t = 1/2$ が面上条件の境界になることを確認した。

【第 3 問】

原点を O とする xy 平面上で、関数 $f(x) = x^2 - x - 2$ で定義される曲線 $C: y = f(x)$ と、 C 上にない点 $R(r, s)$ を考える。 R および C 上の異なる 2 点 $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ ($p < q$) は以下の (i), (ii) を満たすとする。

- (i) P と R を通る直線 l_1 は、 Q を通る C の接線と平行である。
- (ii) Q と R を通る直線 l_2 は、 P を通る C の接線と平行である。

次の問いに答えよ。

- (1) r と s が満たす条件を求め、 p と q をそれぞれ r と s を用いて表せ。

さらに P , Q , R は以下の (iii) を満たす。

- (iii) l_1 と l_2 は直交する。

- (2) s を r の式で表せ。

さらに O , P , Q が一直線上にないとする。

- (3) r の取りうる値の範囲を求めよ。
- (4) $\triangle OPQ$ の面積を T とする。 T^2 を r の式で表せ。
- (5) T^2 を r の関数とみなし、その定義域を (3) で求めた範囲とする。そのとき、 T^2 が極大となる r を求めよ。

【方針】

接線の傾きが $f'(x) = 2x - 1$ であることから、2 本の平行条件を式にする。差をとると $p + q = 2r$ が出るので、 $p = r - d, q = r + d$ と置いて整理する。直交条件で d^2 を決め、面積は原点を含む三角形の座標公式で求める。最後は得られた 1 変数関数を微分して極大点を判定する。

【解答】

- (1) $f'(x) = 2x - 1$ である。条件 (i), (ii) より

$$s = f(p) + (2q - 1)(r - p), \quad s = f(q) + (2p - 1)(r - q)$$

である。両式を引くと

$$(p - q)(p + q - 2r) = 0$$

となり、 $p \neq q$ より $p + q = 2r$ である。 $p = r - d, q = r + d$ ($d > 0$) とおくと、どちらか一方の式から

$$s = r^2 - r - 2 + 3d^2$$

を得る。したがって条件は

$$s > r^2 - r - 2$$

であり、

$$p = r - \sqrt{\frac{s - r^2 + r + 2}{3}}, \quad q = r + \sqrt{\frac{s - r^2 + r + 2}{3}}$$

である。

- (2) 直交条件は

$$(2p - 1)(2q - 1) = -1$$

である。 $p + q = 2r$, $pq = r^2 - d^2$ を用いると

$$4(r^2 - d^2) - 4r + 1 = -1$$

より

$$d^2 = r^2 - r + \frac{1}{2}$$

である。よって

$$s = r^2 - r - 2 + 3\left(r^2 - r + \frac{1}{2}\right) = 4r^2 - 4r - \frac{1}{2}$$

である。

(3) O, P, Q が一直線上にある条件は

$$pf(q) - qf(p) = 0$$

である。ここで

$$pf(q) - qf(p) = (q - p)(pq + 2)$$

であり, $q - p > 0$ だから $pq = -2$ が一直線条件である。一方, (2) のもとでは

$$pq = r^2 - d^2 = r - \frac{1}{2}$$

である。したがって除くべき値は $r = -3/2$ であり,

$$r \neq -\frac{3}{2}$$

である。

(4) 三角形の面積より

$$T = \frac{1}{2} |pf(q) - qf(p)| = \frac{1}{2} (q - p) |pq + 2| = d \left| r + \frac{3}{2} \right|$$

である。したがって

$$T^2 = \left(r^2 - r + \frac{1}{2} \right) \left(r + \frac{3}{2} \right)^2$$

である。

(5)

$$F(r) = \left(r^2 - r + \frac{1}{2} \right) \left(r + \frac{3}{2} \right)^2$$

とおく。微分すると

$$F'(r) = \left(r + \frac{3}{2} \right) \left(4r^2 - \frac{1}{2} \right)$$

である。定義域では $r = -3/2$ は除かれているので, 符号変化を見ると, $r = -1/(2\sqrt{2})$ で増加から減少に変わる。よって T^2 が極大となるのは

$$r = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

である。

【総評】 【公式解答・出題意図との照合】 公式解答例の $s > r^2 - r - 2$, $s = 4r^2 - 4r - 1/2$, $r \neq -3/2$, T^2 , 極大点に全て一致する。

難度 7, 計算量 7. 想定時間は 30 分程度。平行条件から対称な置き方に持ち込めるかが分岐点で, 後半は面積公式と微分の計算を最後まで整理する必要がある。一直線条件で除く値を忘れやすい。

【独立検算】 $p = r - d, q = r + d$ を元の平行・直交条件へ戻して恒等的に成立することを確認し, T^2 の導関数の符号も独立に再計算した。