

横浜国立大学 2025 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ ($0 < x < 2\pi$) に対して, xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。 $f(x)$ の増減, 極値, C の凹凸, 変曲点を調べ, C の概形を描け。

【方針】

$f'(x)$ と $f''(x)$ を直接計算する。分母 $2 + \sin x$ は常に正なので, 符号判定は分子だけで行える。端点での値も確認し, 増減・凹凸・変曲点をまとめて概形を記述する。

【解答】

(1)

$$f'(x) = -\frac{1 + 2\sin x}{(2 + \sin x)^2}$$

である。分母は正であるから, $f'(x) = 0$ となるのは $\sin x = -1/2$, すなわち

$$x = \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{11\pi}{6}$$

である。したがって, $f(x)$ は

$(0, 7\pi/6)$ で減少, $(7\pi/6, 11\pi/6)$ で増加, $(11\pi/6, 2\pi)$ で減少

する。極小値は

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

であり, 極大値は

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

である。

次に

$$f''(x) = -\frac{2\cos x(1 - \sin x)}{(2 + \sin x)^3}$$

である。よって C は

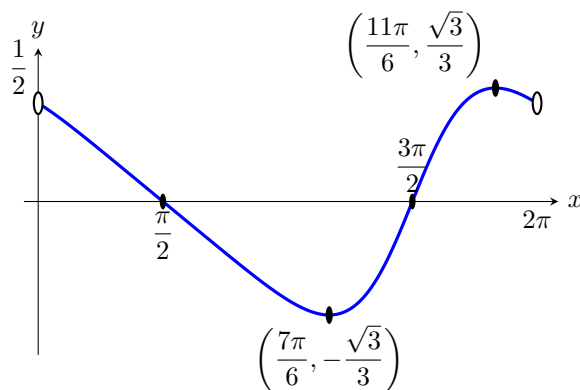
$(0, \pi/2)$ と $(3\pi/2, 2\pi)$ で上に凸, $(\pi/2, 3\pi/2)$ で下に凸

である。変曲点は

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$$

である。さらに $x \rightarrow 0+0$, $x \rightarrow 2\pi-0$ で $f(x) \rightarrow 1/2$ である。以上を用いて概形を描けばよい。

以上の符号情報を座標まで反映すると, 概形は次のようになる。定義域の両端は白丸で表した。



【総評】 【公式解答・出題意図との照合】 公式資料は、増減・極値・凹凸・変曲点を整理してグラフを描く力を評価対象としている。これに合わせ、符号判定に加えて概形を実際に掲載した。

難度 5, 計算量 5。想定時間は 15 分程度。三角関数を含む分数関数の微分計算が主題である。分母が常に正であることを使い、増減と凹凸の符号判定を混同しないことが重要である。

【独立検算】 導関数・第 2 次導関数を再計算し、代表点で符号を数値検算した。

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(2) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_1^t \log \frac{x+1}{x} dx - \log t \right)$$

【方針】

対数の差を積分し、原始関数を直接作る。最後は $(t+1) \log(1+1/t)$ の極限を、 $u = 1/t$ として基本極限に直す。

【解答】

(2)

$$\int \log \frac{x+1}{x} dx = (x+1) \log(x+1) - x \log x - 1$$

である。したがって

$$\int_1^t \log \frac{x+1}{x} dx = (t+1) \log(t+1) - t \log t - 2 \log 2$$

である。よって求める式は

$$(t+1) \log(t+1) - (t+1) \log t - 2 \log 2 = (t+1) \log \left(1 + \frac{1}{t} \right) - 2 \log 2$$

となる。 $u = 1/t$ とおくと、 $t \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0+0$ であり、

$$(t+1) \log \left(1 + \frac{1}{t} \right) = \frac{1+u}{u} \log(1+u) \rightarrow 1$$

である。したがって極限値は

$$1 - 2 \log 2$$

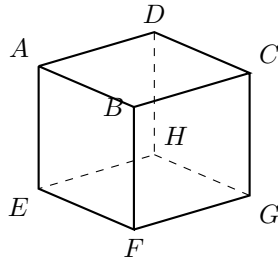
である。

【総評】 【公式解答・出題意図との照合】 公式解答例の極限値 $1 - 2 \log 2$ と一致する。

難度 4, 計算量 4。想定時間は 10 分程度。対数の積分公式と基本極限を組み合わせる標準問題である。定数項、特に下端で出る $2 \log 2$ を落とすと最終値がずれる。

【独立検算】 $t = 10, 1000, 10^6$ で数値評価し、 $1 - 2 \log 2$ への収束を確認した。

【第 2 問】



立方体 $ABCD-EFGH$ を考える。辺 AD , GH の中点をそれぞれ P , Q とする。辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を R とする。ただし, $0 < t < 1$ である。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ と表す。いま, 4 点 B , C , G , F を通る平面上に点 S をとり,

$$\overrightarrow{AS} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

(α , β , γ は実数) と表す。

次の問いに答えよ。

(1) α を求めよ。また, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, t を用いて表せ。

以降, P , Q , R , S が同一平面上にあるとする。

(2) β を γ , t の式で表せ。

(3) 直線 PS と直線 QR が垂直に交わる時, β , γ をそれぞれ t の式で表せ。

(4) 直線 PS と直線 QR が垂直に交わり, かつ点 S が立方体の面 $BCGF$ 上にあるとき, t の取りうる値の範囲を求めよ。

【方針】

立方体の 3 辺を基底ベクトルとして座標化する。 P, Q, R, S の成分を並べ, P, Q, R, S が同一平面上にある条件を, $\overrightarrow{PS} = u\overrightarrow{PQ} + v\overrightarrow{PR}$ とおいて係数比較する。垂直条件は内積で処理し, 最後に面 $BCGF$ 上の条件 $0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \gamma \leq 1$ を調べる。

【解答】

(1) 点 S は面 $BCGF$ 上にあるので, $\vec{a}$ 方向の係数は 1 であり,

$$\alpha = 1$$

である。また,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{AR} = t\vec{a}$$

である。

(2) P, Q, R, S が同一平面上にあるから, 実数 u, v を用いて

$$\overrightarrow{PS} = u\overrightarrow{PQ} + v\overrightarrow{PR}$$

と表せる。各ベクトルの成分は

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{PR} = t\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{PS} = \vec{a} + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

である。 $\vec{c}$ の係数から $u = \gamma$, $\vec{a}$ の係数から $1 = \gamma/2 + tv$, したがって $v = (1 - \gamma/2)/t$ である。 $\vec{b}$ の係数を比較すると

$$\beta - \frac{1}{2} = \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \gamma/2}{t}$$

より,

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t} + \frac{2t+1}{4t}\gamma$$

である。

(3) 立方体の 3 辺方向は互いに垂直である。直線 PS と直線 QR が垂直である条件は

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$$

である。ここで

$$\overrightarrow{QR} = \left(t - \frac{1}{2}\right) \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

だから、内積は

$$t - \beta - \gamma = 0$$

となる。したがって $\beta + \gamma = t$ である。これと (2) の式を連立して、

$$\gamma = \frac{4t^2 - 2t + 2}{6t + 1}, \quad \beta = \frac{2t^2 + 3t - 2}{6t + 1}$$

を得る。

(4) 点 S が面 $BCGF$ 上にあるためには

$$0 \leq \beta \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$

が必要十分である。 $0 < t < 1$ では $6t + 1 > 0$ であり、

$$\beta \geq 0 \iff 2t^2 + 3t - 2 \geq 0 \iff t \geq \frac{1}{2}$$

である。また $\beta \leq 1$ はこの範囲で成り立つ。さらに $\gamma \geq 0$ は常に成り立ち、

$$\gamma \leq 1 \iff 4t^2 - 8t + 1 \leq 0$$

であるが、 $t \geq 1/2$ ならこれも満たされる。よって

$$\frac{1}{2} \leq t < 1$$

である。

【総評】 **【公式解答・出題意図との照合】** 本問は文系第 2 問・理系第 3 問の共通問題である。公式解答例の α, β, γ と $1/2 \leq t < 1$ に全て一致する。

難度 6, 計算量 6。想定時間は 20 分程度。立方体を 3 つの基本ベクトルで座標化すれば標準的に処理できる。採点上は同一平面条件の係数比較、垂直条件の内積、面上にあるための範囲条件を順に落とさないことが重要である。

【独立検算】 複数の有理数 t で、 P, Q, R, S の共面条件を行列式、垂直条件を内積で独立に検算し、 $t = 1/2$ が面上条件の境界になることを確認した。

【第 2 問】

1 個のさいころを 3 回投げ、出た目を順に n_1, n_2, n_3 とする。 O を原点とする xy 平面上の点 A_1, A_2, A_3 を

$$A_k \left(\cos \frac{2n_k\pi}{5}, \sin \frac{2n_k\pi}{5} \right) \quad (k = 1, 2, 3)$$

によって定める。

次の問いに答えよ。

- (1) 点 A_1, A_2, A_3 がすべて一致する確率を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{OA_3}$ が平行になる確率を求めよ。
- (3) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{OA_3}$ が平行になるという条件のもとで、 n_1, n_2, n_3 がすべて奇数である条件付き確率を求めよ。

【方針】

点は正五角形の頂点で、出目 1 と 6 だけが同じ点を与える。各頂点の重みを考えて数える。(2) では、2 つの単位ベクトルの和の向きが正五角形のどの頂点方向になるかを表にし、(3) ではそのうち奇数の出目だけを数える。

【解答】

(1) 出目 1 と 6 は同じ点を与え、出目 2, 3, 4, 5 はそれぞれ別の点を与える。したがって 3 点が一致する場合の数は

$$2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 = 12$$

である。全事象は $6^3 = 216$ 通りなので、確率は

$$\frac{12}{216} = \frac{1}{18}$$

である。

(2) 出目を 5 で割った余りで考える。ただし余り 1 に対応する出目は 1 と 6 の 2 通り、その他の余りに対応する出目は 1 通りである。正五角形の頂点方向を $0, 1, 2, 3, 4$ で表し、その単位ベクトルを $\vec{e}_i$ とする。和の公式から

$$\vec{e}_i + \vec{e}_j = 2 \cos \frac{(i-j)\pi}{5} \left(\cos \frac{(i+j)\pi}{5}, \sin \frac{(i+j)\pi}{5} \right)$$

である。係数は 0 にならないので、この和が $\vec{e}_k$ と平行（逆向きも含む）になる条件は、方向角を π を法として比較して

$$2k \equiv i + j \pmod{5}$$

である。各余りの重みを $m_0 = m_2 = m_3 = m_4 = 1, m_1 = 2$ とする。固定した k に対し、 $i + j \equiv 2k \pmod{5}$ を満たす順序付きの (i, j) の重みの和へ、さらに第 3 投の重み m_k を掛ける。具体的には

k	0	1	2	3	4
m_k	1	2	1	1	1
(i, j) の重みの和	7	8	7	7	7
3 投全体の通り数	7	16	7	7	7

となる。したがって合計は $7 + 16 + 7 + 7 + 7 = 44$ 通りである。したがって求める確率は

$$\frac{44}{216} = \frac{11}{54}$$

である。

(3) (2) の 44 通りのうち、 n_1, n_2, n_3 がすべて奇数であるものは

$$(1, 1, 1), (1, 5, 3), (3, 3, 3), (5, 1, 3), (5, 5, 5)$$

の 5 通りである。よって条件付き確率は

$$\frac{5}{44}$$

である。

【総評】 【公式解答・出題意図との照合】 公式解答例の確率 $1/18, 11/54, 5/44$ と全て一致する。

難度 6, 計算量 5. 想定時間は 20 分程度。正五角形の頂点と出目の重みを分けて数える問題である。出目 1 と 6 が同じ点を与えること、条件付き確率の分母を (2) の有利通り数にすることが主な注意点である。

【独立検算】 さいころの全 $6^3 = 216$ 通りを座標ベクトルで列挙し、平行 44 通り、そのうち全て奇数 5 通りを確認した。

【第 4 問】

次の問いに答えよ。

(1) 実数 x に対して、 $e^x \geq x + 1$ が成り立つことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^3 a_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

によって定める。

(i) $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して、

$$1 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < e^{\frac{1}{3n(n-1)}}$$

が成り立つことを示せ。

(ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $1 \leq a_n < e^{1/3}$ が成り立つことを示せ。

【方針】

(1) は $e^x - x - 1$ の最小値で示す。(2)(i) では比を有理式に直し、分子の差を直接展開して 1 と $1 + 1/(3n(n-1))$ の間に挟む。指数関数の不等式で上側を指数へつなぎ、(ii) では比を順に掛けて望遠和を用いる。

【解答】

(1) $g(x) = e^x - x - 1$ とおく。 $g'(x) = e^x - 1$ であるから、 $g(x)$ は $x < 0$ で減少し、 $x > 0$ で増加する。よって最小値は $x = 0$ での $g(0) = 0$ である。したがって

$$e^x \geq x + 1$$

が全ての実数 x で成り立つ。等号は $x = 0$ のときに限る。

(2)

(i) まず

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^3 = \frac{(3n-1)^3}{27n^2(n-1)}$$

である。分母は正であり、

$$(3n-1)^3 - 27n^2(n-1) = 9n - 1 > 0$$

だから

$$1 < \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

である。

次に、

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 + \frac{1}{3n(n-1)}$$

を示す。正の数 $27n^2(n-1)$ を掛けると、この不等式は

$$(3n-1)^3 < 27n^2(n-1) + 9n$$

となる。左辺は $27n^3 - 27n^2 + 9n - 1$ であり、右辺よりちょうど 1 小さいので成り立つ。

(1) を正の数 $x = 1/(3n(n-1))$ に用いると $1 + x < e^x$ であるから、

$$1 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 + \frac{1}{3n(n-1)} < e^{\frac{1}{3n(n-1)}}$$

を得る。

(ii) (i) の左側の不等式から数列 $\{a_n\}$ は狭義単調増加である。 $a_1 = 1$ より

$$1 \leq a_n$$

である。

上側は $n = 1$ では明らかである。 $n \geq 2$ とし、(i) の右側の不等式を $k = 2, 3, \dots, n$ について順に掛けると、

$$a_n < e^{\frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}} e^{\frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 2}} \dots e^{\frac{1}{3n(n-1)}}.$$

ここで

$$\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

だから、

$$a_n < e^{\frac{1}{3}(1-1/n)} < e^{1/3}.$$

以上より

$$1 \leq a_n < e^{1/3}$$

である。

【総評】 **【公式解答・出題意図との照合】** 公式資料は、指数関数の基本不等式、数列の比の両側評価、上下界の証明を評価対象としている。原典照合により、既存問題文で欠落していた第 2 の不等号を補った。

難度 7, 計算量 6。想定時間は 25 分程度。指数関数の基本不等式と数列の比の評価を結びつける証明問題である。上界では比を $1+1/(3n(n-1))$ で押さえ、指数の和を望ましい形にする整理が得点差になる。

【独立検算】 $2 \leq n \leq 50$ で比を有理数として計算し、 $1 < a_n/a_{n-1} < 1 + 1/(3n(n-1)) < e^{1/(3n(n-1))}$ と整合することを確認した。

【第 5 問】

xy 平面上の曲線 $C: x = y^2$ を考える。実数 t に対して、曲線 C 上の点 (t^2, t) における C の法線を l とする。次の問いに答えよ。

- (1) 法線 l の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 $x = 1$ で囲まれる領域を D とする。また、実数 t が $t \leq 0$ をみたましながら動くとき、法線 l が通過する領域を E とする。 D と E の共通部分を求め、図示せよ。
- (3) (2) で求めた D と E の共通部分の面積を求めよ。

【方針】

曲線 $x = y^2$ は $(x, y) = (t^2, t)$ をパラメータ表示として扱う。法線を求めた後、 $t \leq 0$ を $a = -t \geq 0$ に置き換え、固定した x に対して法線が取り得る y の最大値を求める。面積は D 内の縦切り積分で計算する。

【解答】

(1) $(x, y) = (t^2, t)$ と見ると、接線方向ベクトルは $(2t, 1)$ である。したがって法線の方程式は

$$y - t = -2t(x - t^2)$$

である。これは $t = 0$ のときも $y = 0$ を与える。

(2) $t \leq 0$ として $a = -t \geq 0$ とおく。法線の方程式は

$$y = 2a \left(x - \frac{1}{2} \right) - 2a^3$$

となる。固定した x に対して右辺を $a \geq 0$ の関数と見ると、 $0 \leq x \leq 1/2$ では最大値は 0 であり、 $1/2 \leq x \leq 1$ では最大値は

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right)^{3/2}$$

である。領域 D は

$$0 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}$$

であるから、共通部分は

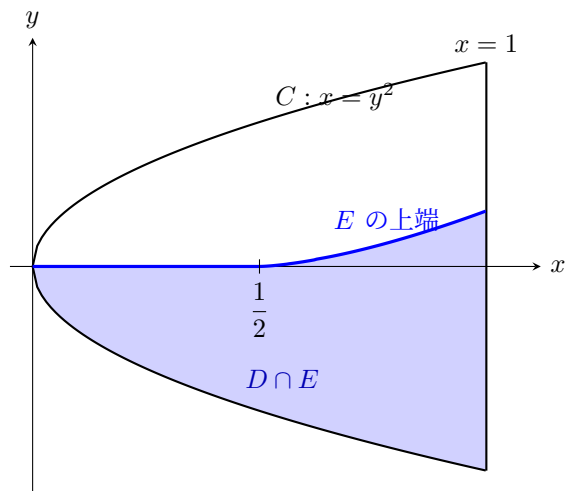
$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad -\sqrt{x} \leq y \leq 0$$

および

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{x} \leq y \leq \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{3/2}$$

で表される領域である。これを図示すればよい。

共通部分を青く示すと次のようになる。太い青線が法線族の通過領域 E の上端である。



(3) (2) より面積は

$$\int_0^{1/2} \sqrt{x} dx + \int_{1/2}^1 \left\{ \sqrt{x} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{3/2} \right\} dx$$

である。したがって

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx + \frac{4}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{5/2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{15\sqrt{6}}$$

である。

【総評】 【公式解答・出題意図との照合】 公式解答例の法線 $y = -2tx + 2t^3 + t$ 、共通領域の境界、面積 $2/3 + \sqrt{6}/45$ と全て一致する。

難度 7, 計算量 7。想定時間は 30 分程度。法線族の通過領域を固定した x で縦に見る発想が必要である。領域 E の上端を最大値問題として求め、 D との共通部分を分けて積分するところが計算上の山場である。

【独立検算】 固定した x ごとに法線族を細かく走査し、上端が $x \leq 1/2$ で 0、 $x \geq 1/2$ で $4(x - 1/2)^{3/2}/(3\sqrt{3})$ となることを数値検算した。